

$$9.- G = \omega.C.tang\delta$$

Si reemplazamos en la 9.- la expresión de la capacidad distribuida de una línea bifilar abierta:

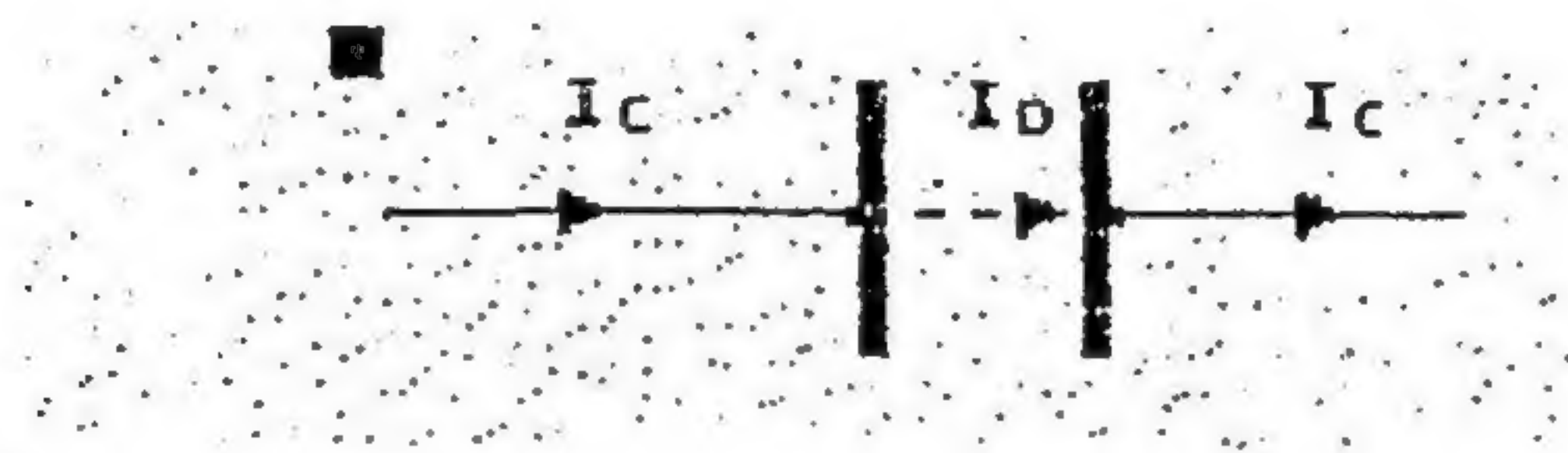
$$10.- G = \omega. \frac{\pi. \epsilon. \epsilon_0}{\ln \frac{D}{a}} tang\delta$$

Donde $tang\delta$ es un parámetro físico obtenible mediante medición.

Se trata por lo general de un valor suministrado por el fabricante del cable.

0047A.- EJERCICIOS RESUELTOS

0048.- Encontrar la Corriente de Desplazamiento en el dieléctrico de un capacitor de placas paralelas y constatar que dicho valor coincide con la Corriente de Conducción en los conectores.



SOLUCION:

La capacidad está dada por la fórmula:

$$1.- C = \epsilon. \epsilon_0. \frac{\Sigma P}{\delta}$$

Donde ΣP es la superficie de las placas y δ es la separación.

En otro orden, la corriente de conducción es proporcional a la variación temporal de la diferencia de potencial aplicada.

$$2.- I_C = C. \frac{dv}{dt}$$

Reemplazando la 1.- en la 2.-, tenemos:

$$3.- I_C = \epsilon. \epsilon_0. \frac{\Sigma P}{\delta} \cdot \frac{dv}{dt}$$

El vector desplazamiento es directamente proporcional al campo eléctrico.

$$4.- D = \epsilon. \epsilon_0. E$$

Mientras que el campo eléctrico es el gradiente de potencial.

$$5.- E = \frac{dv}{d\delta} = \frac{v}{\delta}$$

Entonces el vector desplazamiento nos queda expresado así:

$$6.- \quad D = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{v}{\delta}$$

La densidad superficial de corriente de desplazamiento es la variación temporal del vector desplazamiento.

$$7.- \quad J_D = \frac{dD}{dt} = \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0}{\delta} \frac{dv}{dt}$$

Por lo tanto la corriente de desplazamiento es la integral de superficie de la densidad superficial de corriente.

$$8.- \quad I_D = \iint J_D \cdot d\Sigma = \iint \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot dv \cdot d\Sigma}{\delta \cdot dt} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{\Sigma_P}{\delta} \frac{dv}{dt}$$

Observese que las ecuaciones 8 y 3 son exactamente iguales.

$$9.- \quad I_D = I_C$$

Es dable destacar que si se trata de una línea de transmisión donde participan tanto la conductancia de pérdidas G como la capacidad distribuida C conviven ambas corrientes. La ecuación de Maxwell-Faraday, así lo contempla.

$$10.- \quad \bar{\nabla} \times H = J_C + J_D$$

0049.-El suelo húmedo tiene una conductividad de 10^{-3} mho/m y una constante dieléctrica de 2,5. El mismo se halla sometido a un campo eléctrico dado por:

$E = 6.0 \times 10^{-6} \text{ Sen } 9.0 \times 10^9 t \text{ (V/m)}$. Encontrar las densidades de corriente superficial, de corriente y de desplazamiento.

SOLUCION:

$$1.- J_C = \sigma E = 6.0 \times 10^{-9} \text{ Sen } 9.0 \times 10^9 t$$

$$2.- D = \epsilon \epsilon_0 E = 2.5 \times 8.85 \times 6.0 \times 10^{-18} \text{ Sen } 9.0 \times 10^9 t$$

$$3.- J_D = \frac{dD}{dt} = 2.5 \times 8.85 \times 6.0 \times 9.0 \times 10^{-9} \text{ Cos } 9.0 \times 10^9 t$$

$$3a. J_D = 1.194 \times 10^{-6} \text{ Cos } 9 \times 10^9 t$$

Es interesante verificar la relación existente entre ambas densidades:

$$4.- \frac{J_D}{J_C} = \frac{1.194}{6.0} \times 10^3 = 199$$

Comprobamos que dicho material presenta a la frecuencia de nueve gigahertz, una densidad de corriente de desplazamiento 200 veces mayor que la densidad de corriente de conducción.

Tal fenómeno conlleva, en los procesos de propagación, a pormenorizar la importancia del nervio central en los cables coaxiales motivo por el cual se lo extrae y se llega así a la guía de onda hueca.

0050.- *Encontrar la frecuencia a la que las densidades de corriente de conducción y desplazamiento son iguales en a): agua destilada donde la conductividad vale $2 \times 10^{-4} \text{ mho/m}$ y constante dieléctrica $\epsilon = 81$ y b): agua de mar donde la conductividad vale 4 mho/m y la constante dieléctrica $\epsilon = 1$.*

SOLUCION:

$$a) \quad f_{dest.} = \frac{\sigma}{6,28 \times \epsilon \times \epsilon_0} = \frac{2 \times 10^{-4}}{6,28 \times 81 \times 8,85 \times 10^{-12}}$$

$$f_{dest.} = 4,44 \times 10^4 \text{ Hertz.}$$

$$b) \quad f_{mar} = \frac{\sigma}{6,28 \times \epsilon \times \epsilon_0} = \frac{4}{6,28 \times 1 \times 8,85 \times 10^{-12}}$$

$$f_{mar} = 7,19 \times 10^{10} \text{ Hertz}$$

0051.-Un Campo Magnético se propaga en el espacio libre con una constante de fase $\beta = 30 \text{ rad / m}$ y una amplitud que en el origen

vale $\frac{1}{3 \cdot \pi} \text{ (A / m)}$. Obtener :

a).-Campo Magnético H , b).-Campo Eléctrico E , c).-Densidad de Corriente de Desplazamiento J .

SOLUCION

$$a) \quad H = \frac{1}{3 \cdot \pi} \text{Cos}(\omega \cdot t + \beta \cdot y)$$

$$b) \quad E = 40 \times \text{Cos}(\omega \cdot t + \beta \cdot y)$$

$$c) \quad J_D = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{dE}{dt} = 8,85 \times 10^{-12} \times 40 \times \omega \times \text{Sen}(\omega \cdot t + \beta \cdot y)$$

$$\bar{J}_D = 354 \times 10^{-12} \times \bar{e} \times \beta \times \text{Sen}(\omega \cdot t + \beta \cdot y)$$

$$\bar{J}_D = 3,18 \times \text{Sen}(9 \times 10^9 t + 30 \times y)$$

0052.-Una onda electromagnética se propaga en el espacio libre con una constante de fase de $0,524 \text{ rad / m}$. La misma onda cambia su constante fase pasando a valer $1,81 \text{ rad / m}$ cuando se introduce en otro medio dieléctrico. Encontrar el valor de la constante dieléctrica de ese medio.

SOLUCION:

$$1.- \frac{\omega}{0,524} = 3 \times 10^8 \rightarrow \omega = 1,572 \times 10^8 \text{ rad / seg}$$

$$2.- \frac{1,572 \times 10^8}{1,81} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{\epsilon}} \rightarrow \sqrt{\epsilon} = \frac{1,81 \times 3 \times 10^8}{1,572 \times 10^8} = 3,45$$

$$\rightarrow \epsilon = 11,93$$

0053.-Una onda electromagnética cuyo campo eléctrico esta dado por $E = 10 \times \text{Sen}(\omega.t - \beta.y)$, cruza un disco circular de radio 15,5m. Calcular la potencia promedio que atraviesa el disco.

SOLUCION

$$P_M = \frac{1}{2} \iint \frac{E^2}{120 \times \pi} d\Sigma = \frac{1^2}{2 \times 377} \times \pi \times (15,5)^2 = 1 \text{ watio}$$

0054.-La intensidad de campo eléctrico que se propaga en un medio dieléctrico puro cuya constante dieléctrica vale $\epsilon = 9 \times \epsilon_0$ y la permeabilidad vale $\mu = \mu_0$, se expresa:

$E(y,t) = 5 \times \text{Cos}(10^9.t - \beta.y)$, Encontrar: a) el campo magnético H y b) constante de fase β . c) Densidad de Corriente de Desplazamiento. d) Velocidad de Propagación

SOLUCION:

Un Método:

Obtenemos primero la impedancia intrínseca del medio dielectrico.

$$1.- \eta_i = \sqrt{\frac{\mu_0}{9 \times \epsilon_0}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \frac{120 \cdot \pi}{3} = 40 \cdot \pi \Omega$$

$$2.- \quad H\left(\frac{A}{m}\right) = \frac{E}{\eta_i} = \frac{5}{40 \cdot \pi} \cos(10^9 t - \beta \cdot y)$$

$$2a. \quad H(A/m) = 0,0398 \cdot \cos(10^9 t - \beta \cdot y)$$

$$3.- \quad \beta = \omega \sqrt{\mu_0 \mathcal{D}\epsilon} = 3 \cdot \omega \cdot \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} = 3 \cdot \frac{\omega}{c}$$

$$3a. \quad \beta = 3 \cdot \frac{10^9}{3 \cdot 10^8} = 10 \text{ rad/m}$$

$$4.- \quad J_D = 9 \times \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \frac{9 \times 8,85 \times 10^{-12} \times 5 \times 10^9}{1} (-\text{Sen}(10^9 t - \beta \cdot y))$$

$$J_D = -0,398 \times \text{Sen}(10^9 t - 10 \cdot y) (\text{Amp/m})$$

$$5.- \quad v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{10^9}{10} = 10^8 \text{ m/seg}$$

Es digno comentar que cuando la constante dieléctrica es nueve veces superior a la del vacío, la impedancia intrínseca y la velocidad de propagación se reducen a la tercera parte.

0055.-LA SEGUNDA PARTE de "MEDIOS DE ENLACE"

En la segunda parte del presente texto se desarrollará la teoría de las líneas de transmisión.

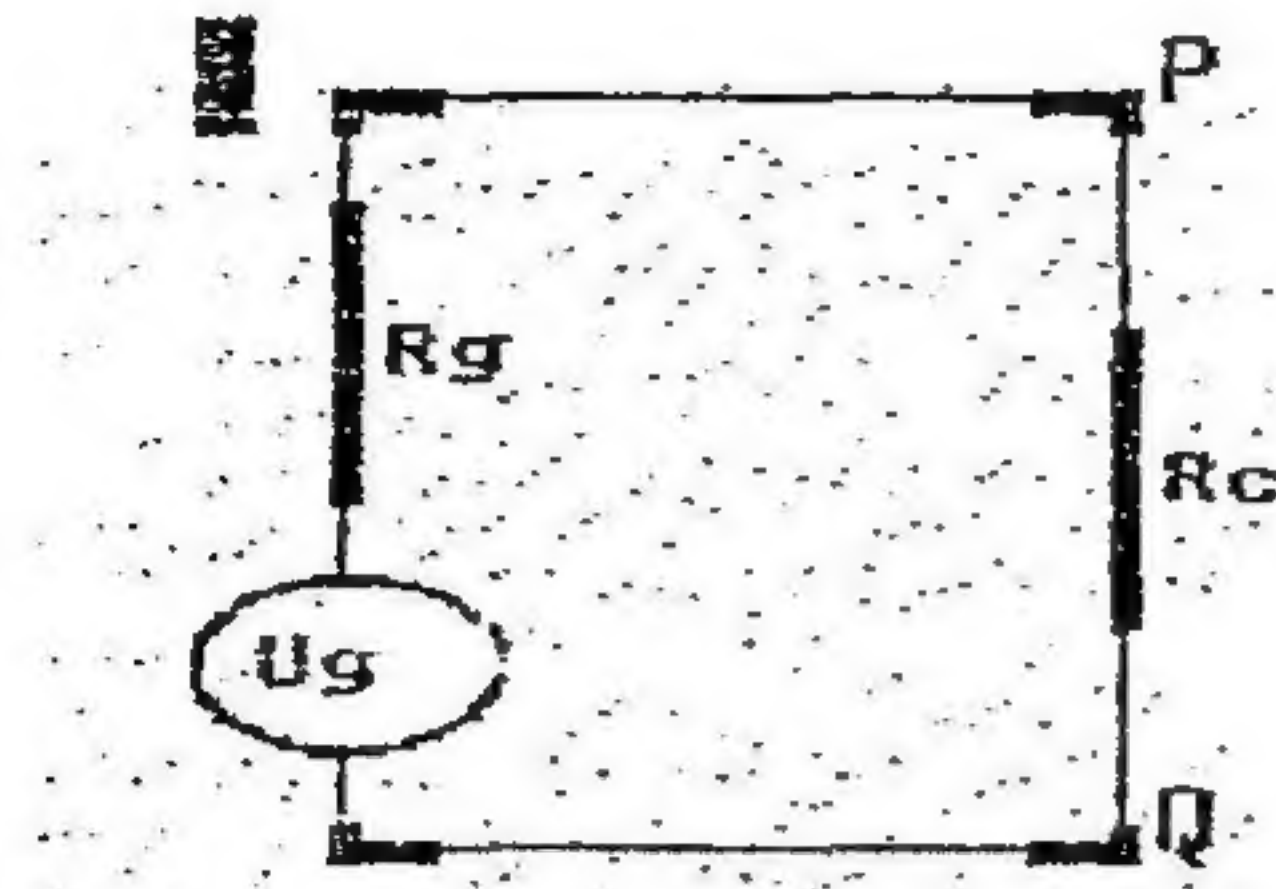
Comprende el estudio de todas las relaciones entre los parámetros intervinientes en el proceso de propagación de una onda electromagnética a lo largo de un medio físico de enlace.

Asimismo, se desarrollan los métodos utilizados en la medición del ROE, impedancia de carga, frecuencia de la señal transmitida.

Se construye el Gráfico de Smith, utilizado en el cálculo de los parámetros mencionados como también en la aplicación de los métodos de adaptación de impedancias.

Se desarrollan ejercicios resueltos de aplicación.

El circuito simple se representa mediante una fuente de Thevenin.



La tensión transmitida es mediante la ley de Ohm de la teoría de Circuitos:

$$1) \quad U_T = U_g \frac{R_c}{R_g + R_c}$$

La tensión transmitida es mediante la ley de Superposición de Maxwell :

$$2) \quad U_T = U_{inc} + U_{reflex}$$

La tensión incidente es la tensión que se propaga cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna, es decir:

$$3) \quad U_{inc} = \frac{U_g}{2}$$

Reemplazamos la 1) y la 3) en la 2):

$$4) \quad U_g \frac{R_c}{R_g + R_c} = \frac{U_g}{2} + U_{reflex}$$

De aquí se deduce la tensión reflejada:

$$5) \quad U_{reflex} = U_g \frac{R_c}{R_g + R_c} - \frac{U_g}{2}$$

$$6) \quad U_{reflex} = \frac{U_g}{2} \left(\frac{2 \times R_c}{R_g + R_c} - 1 \right) = U_{inc} \left(\frac{R_c - R_g}{R_c + R_g} \right)$$

El coeficiente de reflexión es la relación entre la señal reflejada y la señal incidente.

$$7) \quad \Gamma = \frac{U_{reflex}}{U_{inc}} = \frac{R_c - R_g}{R_c + R_g}$$

Reemplazando la 3) y la 7) en la 6):

$$8) \quad U_{\text{reflex}} = \dot{\Gamma} \times U_{\text{inc}}$$

La expresión precedente es válida para la intensidad de la corriente eléctrica:

$$9) \quad I_{\text{reflex}} = \dot{\Gamma} \times I_{\text{inc}}$$

Donde la intensidad de la corriente incidente es la que se produce cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia interna.

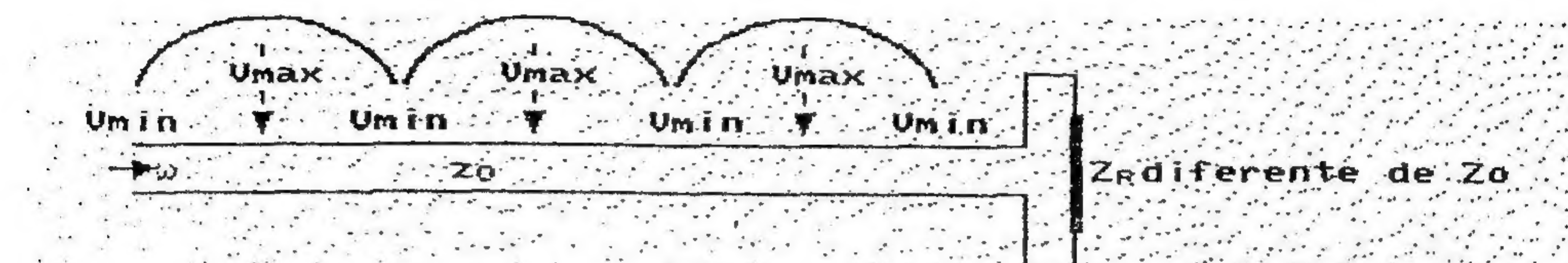
$$10) \quad I_{\text{inc}} = \frac{U_g}{2 \times R_g}$$

La potencia incidente es el producto de la corriente incidente con la tensión incidente.

$$11) \quad P_{\text{inc}} = I_{\text{inc}} \times U_{\text{inc}} = \frac{U_g}{2 \times R_g} \times \frac{U_g}{2} = \frac{U_g^2}{4 \times R_g}$$

Se aprecia que la potencia incidente es la potencia máxima transmitida que se logra por otra parte de acuerdo a la teoría de circuitos cuando $R_c = R_g$.

La existencia de reflejo provoca ondulación a lo largo del medio de Venlace.



Se crea un régimen ondulatorio cuyo grado de magnitud se mide mediante la relación:

$$12) \quad ROE = \frac{V_{max}}{V_{min}}$$

El objetivo a perseguir es lograr que dicha relación tienda a la unidad. Ello se logrará cuando:

$$13) \quad R_c \rightarrow R_g \quad ROE \rightarrow 1$$

El ROE guarda relación con el coeficiente de reflexión:

$$14) \quad ROE = \frac{|U_{inc}| + |U_{reflex}|}{|U_{inc}| - |U_{reflex}|} = \frac{1 + \frac{|U_{reflex}|}{|U_{inc}|}}{1 - \frac{|U_{reflex}|}{|U_{inc}|}} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}$$

Si tenemos en cuenta la 7) resulta que el ROE se calcula para resistencias de carga reales de la siguiente manera:

$$15) \quad ROE = \frac{Z_R}{Z_0} \quad \text{si } Z_R > Z_0$$

$$16) \quad ROE = \frac{Z_0}{Z_R} \quad \text{si } Z_0 > Z_R$$

La potencia reflejada es el producto de la tensión reflejada por la corriente reflejada.

$$17) \quad P_{reflex} = U_{reflex} \times I_{reflex} = (U_{inc} \cdot \Gamma) \times (I_{inc} \cdot \Gamma)$$

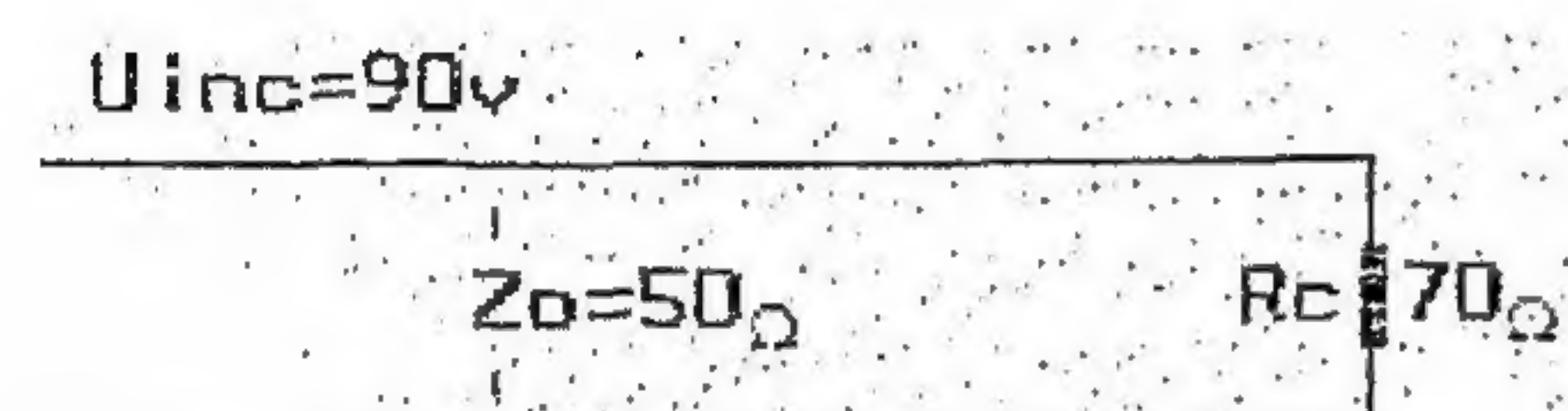
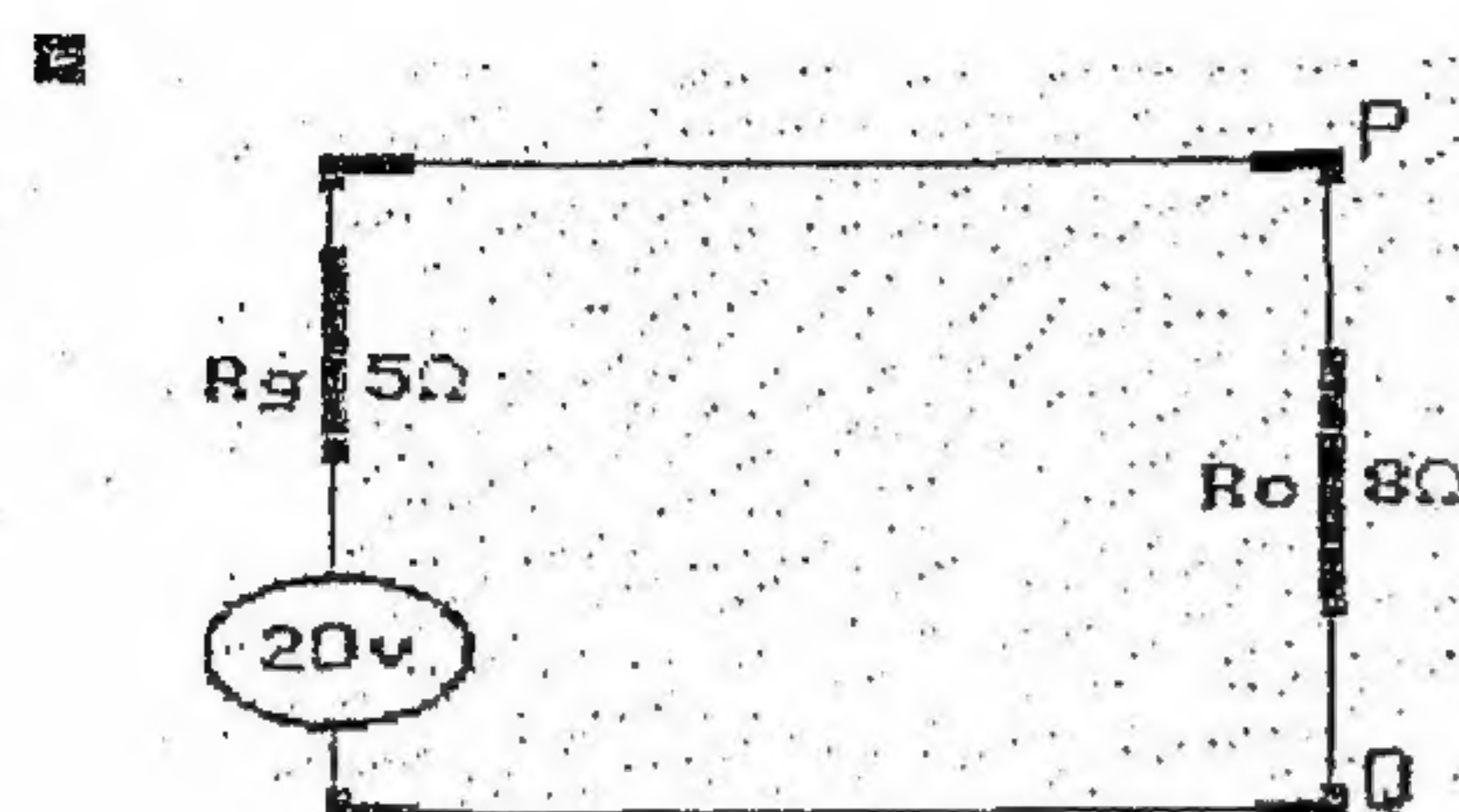
$$18) \quad P_{reflex} = P_{inc} \times \Gamma^2$$

La potencia que llega a la carga es la incidente menos la que vuelve reflejada hacia el generador.

$$19) \quad P_T = P_{R_c} = P_{inc} - P_{reflex} = P_{inc} - P_{inc} \times \Gamma^2$$

$$20) \quad P_{R_c} = P_{inc}(1 - \Gamma^2)$$

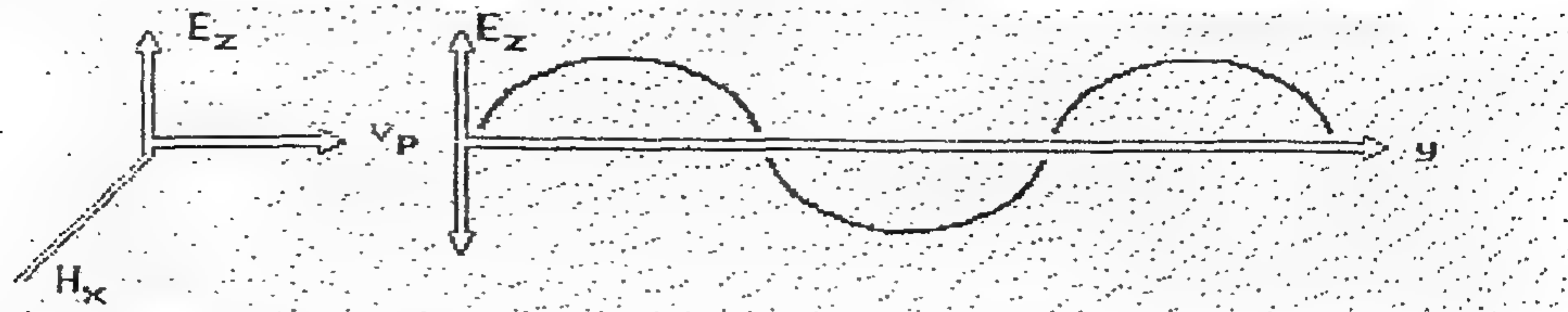
APLICACIONES NUMERICAS



Obtener en ambas configuraciones la potencia disipada en la carga.

La Teoría Circuitual de los Campos

La diferencia del potencial U genera el campo eléctrico E , mientras que la intensidad de corriente I genera el campo magnético H . Existe una inter-relación entre ambos.



a) El campo eléctrico E es directamente proporcional al campo magnético H : b) El campo magnético H es directamente proporcional al campo eléctrico E .

$$1) \quad E = \mu \cdot \mu_0 \cdot V_p \times H \quad 2) \quad H = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot V_p \times E$$

Dividiendo miembro a miembro se obtiene la impedancia intrínseca del medio η . Y si multiplicamos miembro a miembro, la velocidad de la propagación de la señal V_p .

$$3) \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \cdot \epsilon_0}} \quad 4) \quad \mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} (\text{Hy} / \text{m})$$

$$5) \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot 9 \times 10^9} = 8.85 \times 10^{-12} (\text{Farad} / \text{m})$$

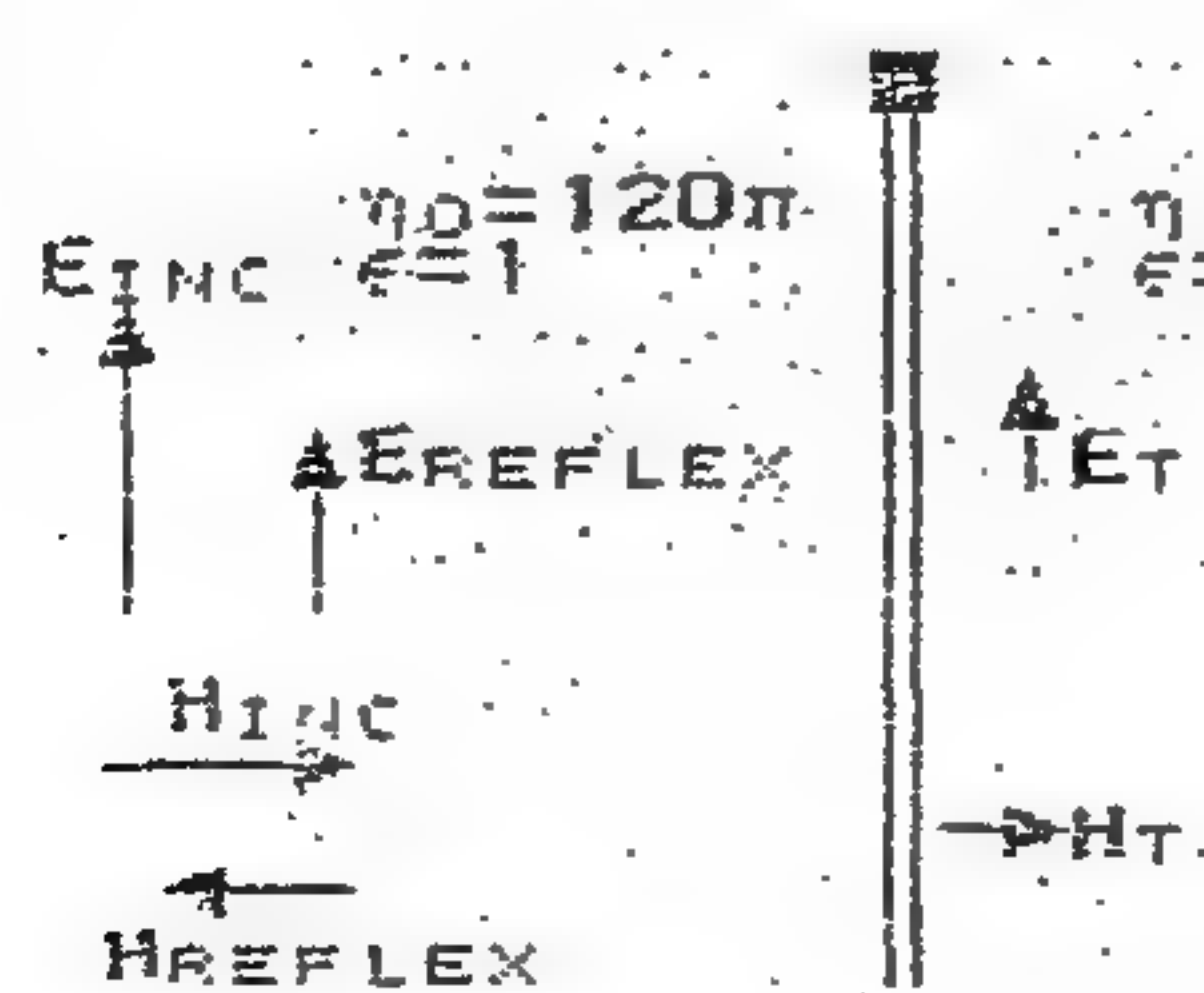
$$6) \quad \eta = \frac{120 \cdot \pi}{\sqrt{\epsilon}} = 377 \Omega / \sqrt{\epsilon} \quad v_p = \frac{3 \times 10^8 \text{ m/s}}{\sqrt{\epsilon}}$$

Una onda electromagnética que se propaga en el espacio libre atraviesa un medio dieléctrico de constante ϵ_1 .

Los campos transmitidos es según la teoría de superposición de Maxwell:

$$7) \quad E_T = E_{inc} + E_{reflex}$$

$$8) \quad H_T = H_{inc} - H_{reflex}$$

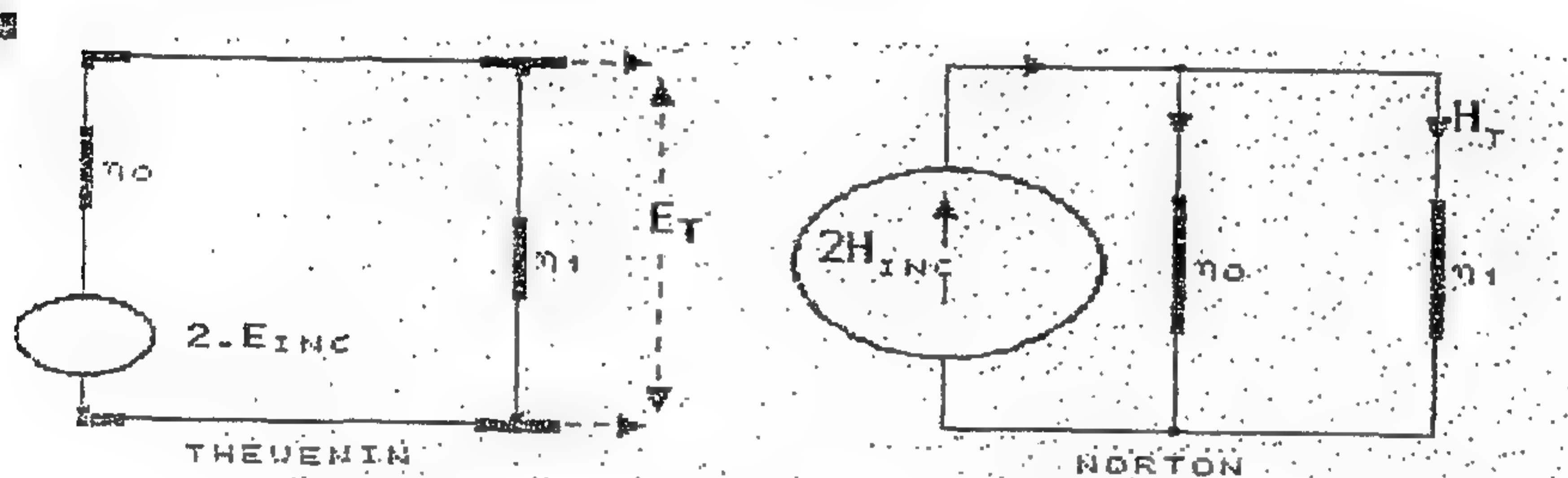


$$\eta_1 = \frac{E_T}{H_T} = \frac{E_{inc} + E_{reflex}}{H_{inc} + H_{reflex}} = \frac{E_{inc}}{H_{inc}} \times \frac{1 + \frac{E_{reflex}}{E_{inc}}}{1 - \frac{H_{reflex}}{H_{inc}}} = \eta_0 \times \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_0} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \rightarrow \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} = \Gamma = \frac{E_{reflex}}{E_{inc}}$$

$$E_T = E_{inc} + E_{inc} \frac{\eta_1 - \eta_0}{\eta_1 + \eta_0} = 2 \times E_{inc} \times \frac{\eta_1}{\eta_0 + \eta_1}$$

La Síntesis del Circuito (Thevenin y Norton)



0004.-EL TEOREMA DE GAUSS

Veinte años después que Coulomb diera a conocer la ley y fórmula que rige la fuerza de atracción y repulsión entre cargas electrostáticas, Carlos Federico Gauss, enuncia entre 1806 y 1810, el resultado de los estudios y ensayos destinados a determinar con precisión el valor del flujo eléctrico saliente de un cuerpo conductor sometido a polarización.

$$4) \phi_e = \oiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot d\vec{\Sigma}$$

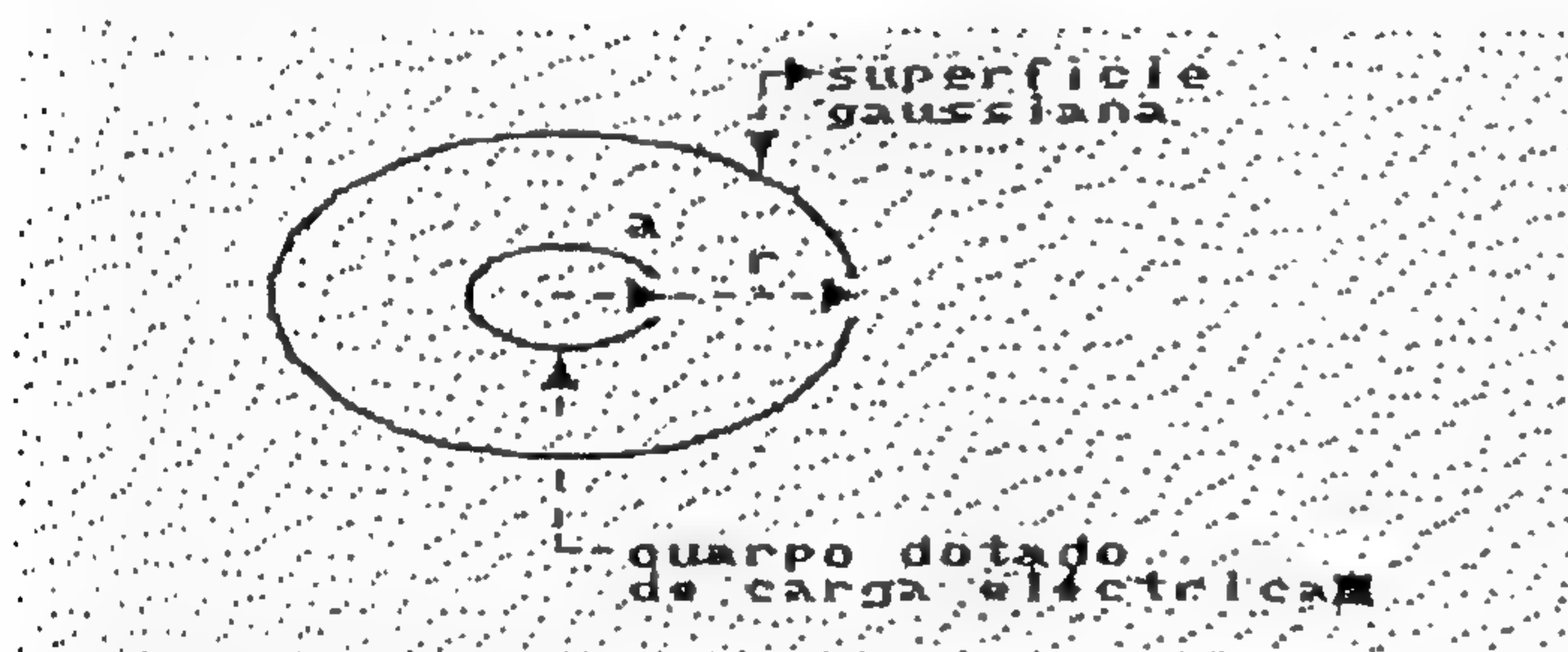
Donde \vec{D} es la densidad superficial de flujo que involucra al medio caracterizado por la constante dieléctrica ϵ y Σ es la superficie esférica que envuelve al cuerpo conductor.

$$5) \vec{D} = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}$$

Gauss demuestra que el flujo eléctrico total emergente resulta cuantitativamente igual a la carga eléctrica encerrada en el mismo.

$$6) Q = \phi_e = \oiint_{\Sigma} \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E} \cdot d\vec{\Sigma}$$

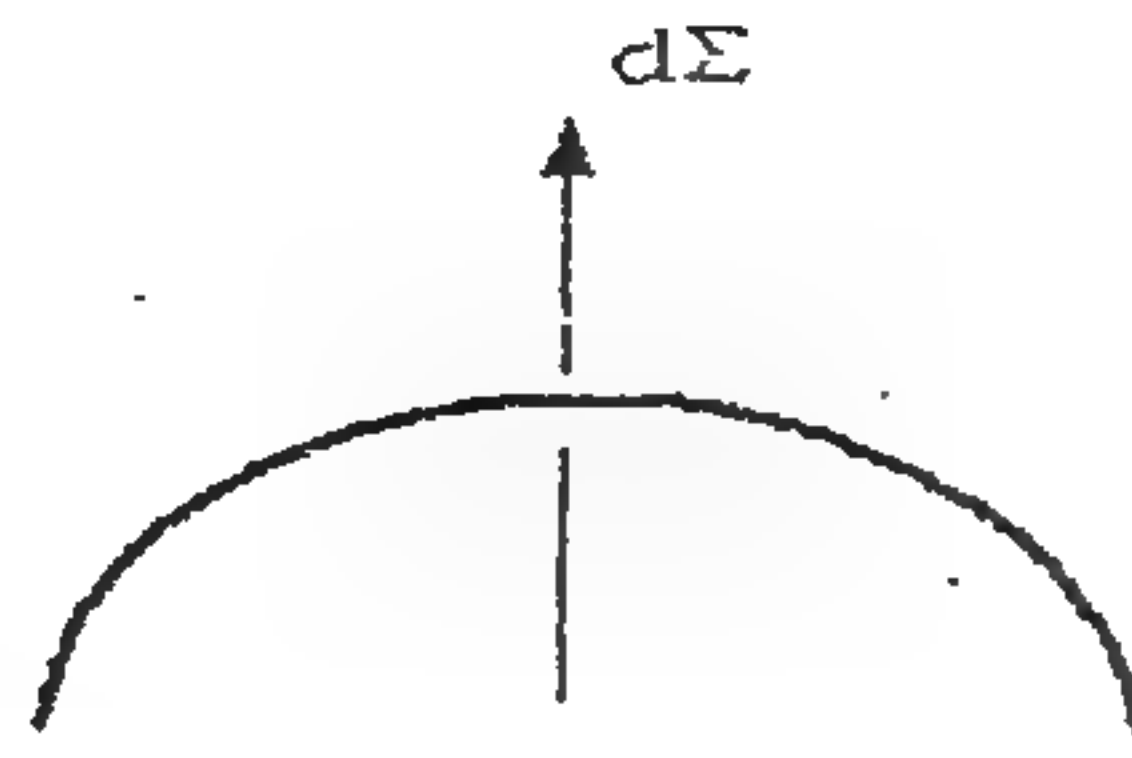
Un ejemplo inmediato surge de considerar un cuerpo esférico.



En la superficie gaussiana se tiene un campo eléctrico constante por lo que el proceso de integración se simplifica.

La superficie exterior de la esfera está dada por:

Se tiene una densidad superficial de corriente $J = \frac{1}{r^3} (\bar{r}^0 2 \cos \theta + \bar{\theta}^0 \sin \theta)$ que atraviesa un cascarón hemisférico de 20cm. Calcular la corriente que pasa por el mismo.

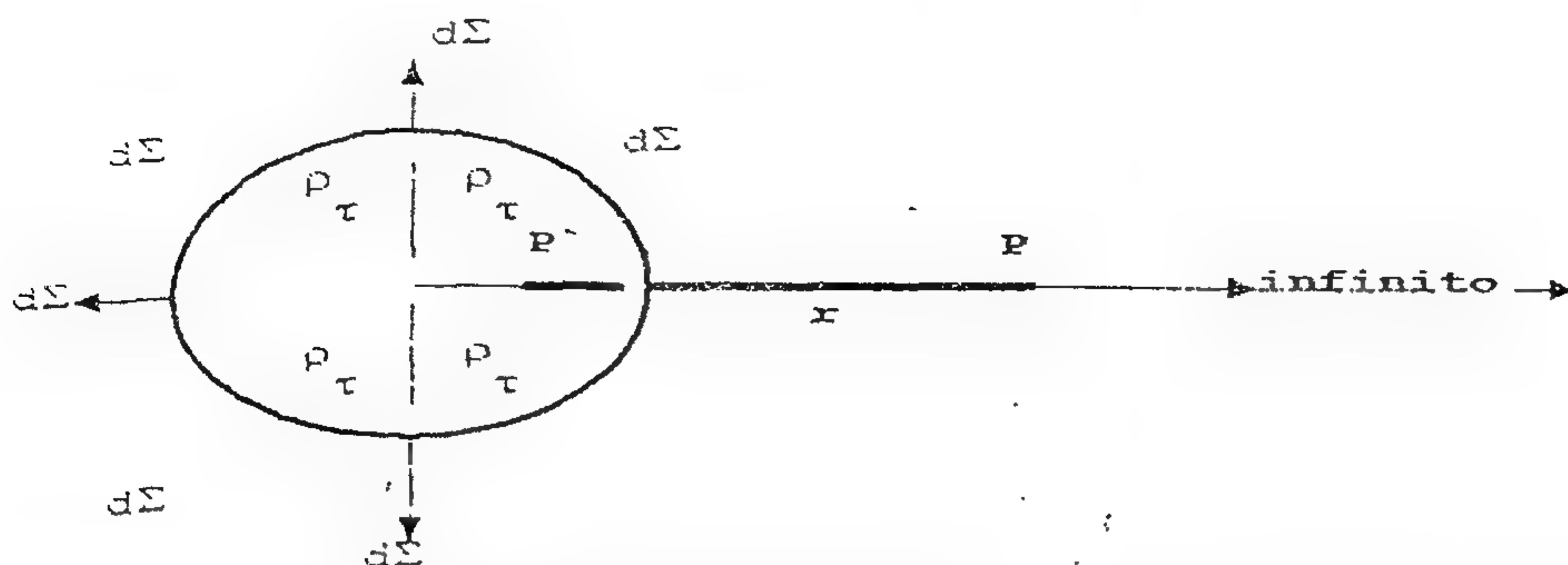


$$d\Sigma = \bar{r}^0 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$\int_{\Sigma} J \cdot d\Sigma = I \quad I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{r^3} 2 \cos \theta r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$I = \frac{4\pi}{r} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d(\sin \theta) \Big|_{r=0,2} = \frac{4\pi}{0,2} \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2} = 31,4 A$$

Se tiene un cuerpo esférico dotado de una densidad de carga volumétrica ρ_r (Coul/m³)



CAMPO ELECTRICO EN UN PUNTO EXTERIOR

En el punto exterior "P" hacemos pasar una superficie gaussiana y aplicamos el teorema de Gauss.

$$1. \quad E \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \Sigma_G = \rho_r \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \quad \Sigma_G = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

$$2. \quad E \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \rho_r \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 \quad E_{\text{ext}} = \frac{\rho_r \cdot a^3}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$$

CAMPO ELECTRICO EN LA PERIFERIA (r=a)

$$E(r=a) = \frac{\rho_r \cdot a}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}$$

CAMPO ELECTRICO EN EL INTERIOR

$$E_{\text{INT}} = \frac{\rho_r \cdot r}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}$$

POTENCIAL EN UN PUNTO EXTERIOR

$$3 \quad U_{\text{EXT}} = \int_{\infty}^r E_{\text{EXT}} \times dr = \int_{\infty}^r \frac{\rho_r \cdot a^3}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \times dr = -\frac{\rho_r \cdot a^3}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

POTENCIAL EN LA PERIFERIA

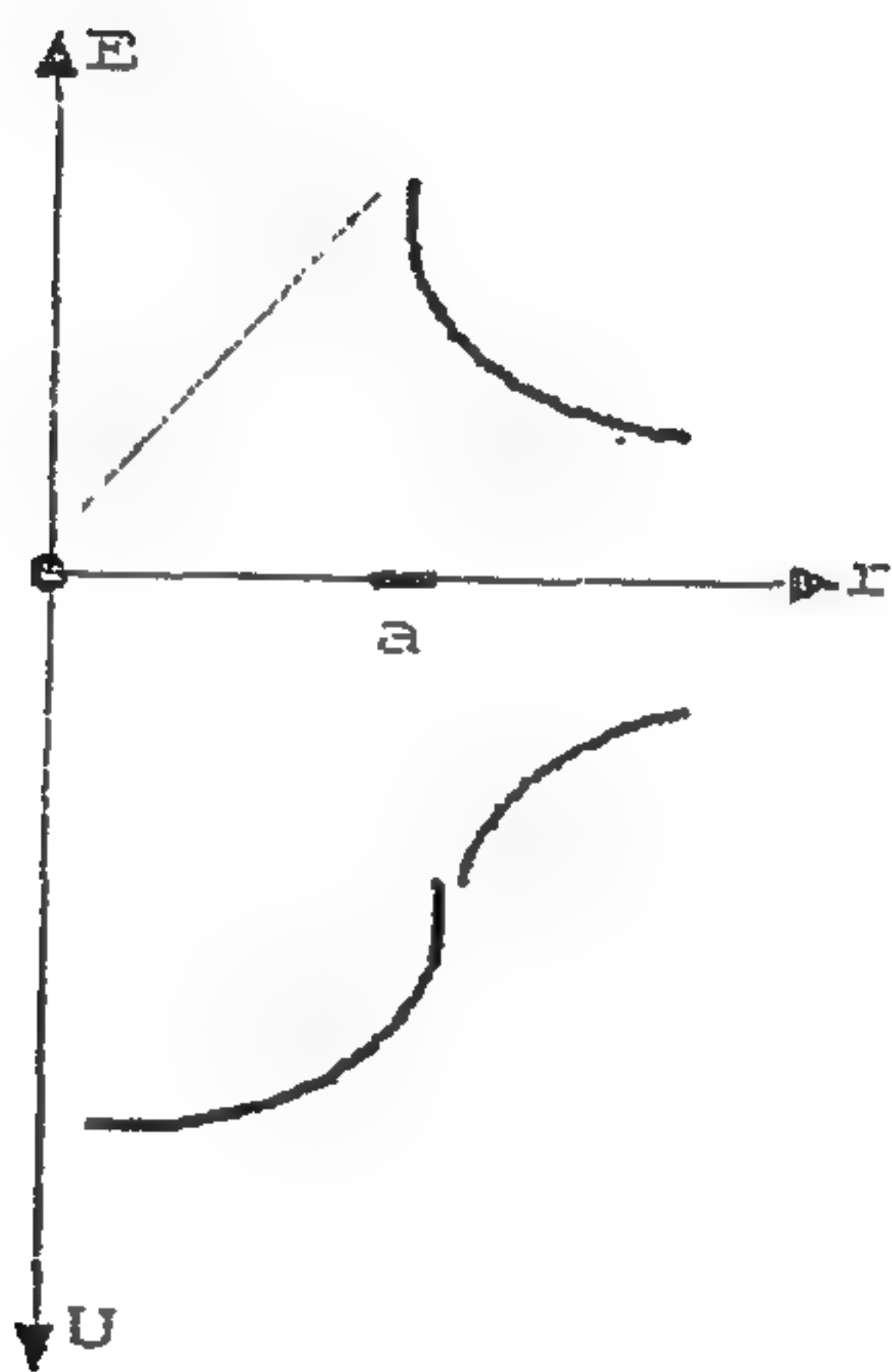
$$4 \quad U(r=a) = -\frac{\rho_v \cdot a^2}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}$$

POTENCIAL EN UN PUNTO INTERIOR

$$5 \quad U_{INT} = -\frac{\rho_v \cdot a^2}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} + \int_{r=a}^r E_{INT} \cdot dr = -\frac{\rho_v \cdot a^2}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} + \int_{r=a}^r \frac{\rho_v \cdot r}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \cdot dr$$

$$6 \quad U_{INT} = -\frac{\rho_v \cdot a^2}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} + \frac{\rho_v}{3 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right)$$

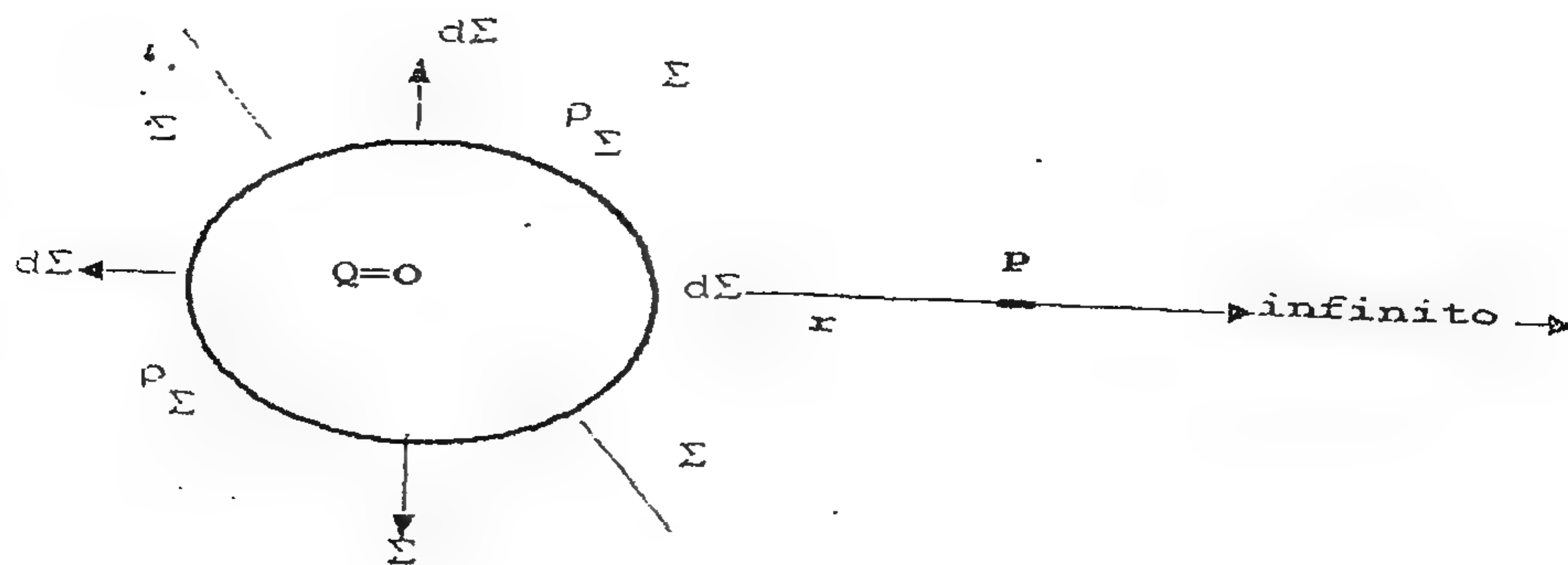
$$7 \quad U_{INT} = -\frac{\rho_v \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} - \frac{\rho_v \cdot r^2}{6 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}$$



Cabe destacar que en el centro del cuerpo periférico dotado de la densidad de carga volumétrica el potencial es negativo y vale:

$$U(r=0) = -\frac{\rho_v \cdot a^2}{2 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}$$

Asimismo es dable mencionar y tal como se muestra en la representación gráfica que en el infinito ambos parámetros tienden a cero.



CAMPO ELECTRICO EN EUN PUNTO EXTERIOR

$$1 \quad E_{\text{EXT}} \times \varepsilon \times \varepsilon_0 \times 4.\pi.r^2 = \rho_{\Sigma} \times 4.\pi.a^2$$

$$2 \quad E_{\text{EXT}} = \frac{\rho_{\Sigma} \cdot a^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$$

CAMPO ELECTRICO EN LA PERIFERIA

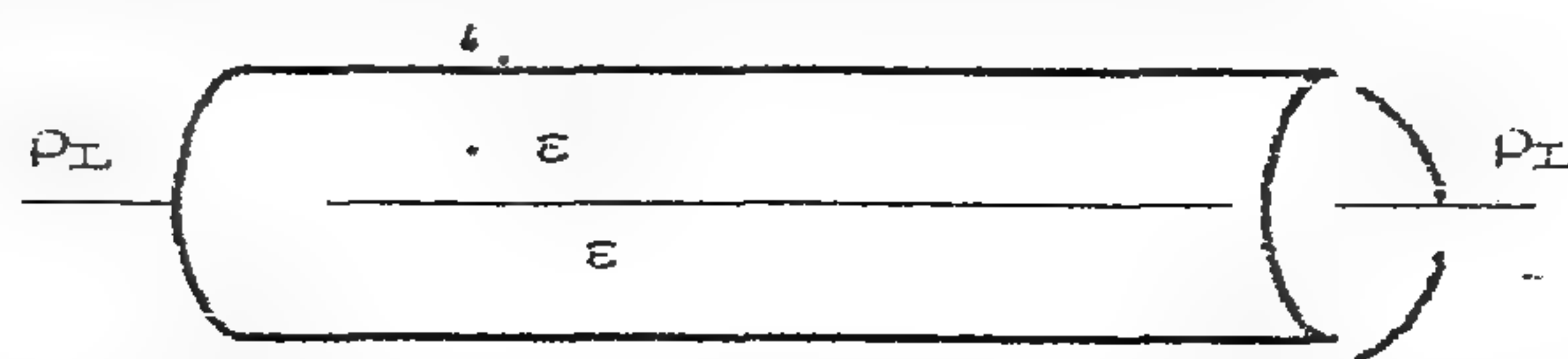
$$3 \quad E_{r=a} = \frac{\rho_{\Sigma}}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

POTENCIAL EN UN PUNTO EXTERIOR, PERIFERIA Y/O INTERIOR

$$4 \quad U_{\text{EXT}} = -\frac{\rho_{\Sigma} \cdot a^2}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot r}$$

$$U(r \leq a) = -\frac{\rho_{\Sigma} \cdot a}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$$

CAMPO ELECTRICO INTERIOR EN EL CABLE COAXIAL



La cubierta exterior no contribuye con el campo por ello en el dieléctrico estará dado por:

$$1 \quad E \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \Sigma_G = \rho_L \cdot l \quad \Sigma_G = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \quad E = \frac{\rho_L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r}$$

DIFERENCIA DE POTENCIAL

$$2 \quad U_{ab} = \int_a^b E \cdot dr = \int_a^b \frac{\rho_L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r} \cdot dr = \frac{\rho_L}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

CAPACIDAD DISTRIBUIDA

$$3 \quad C(\text{Farad/m}) = \frac{\rho_L}{U_{ab}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}$$

CAMPO MAGNETICO INTERIOR EN EL CABLE COAXIAL

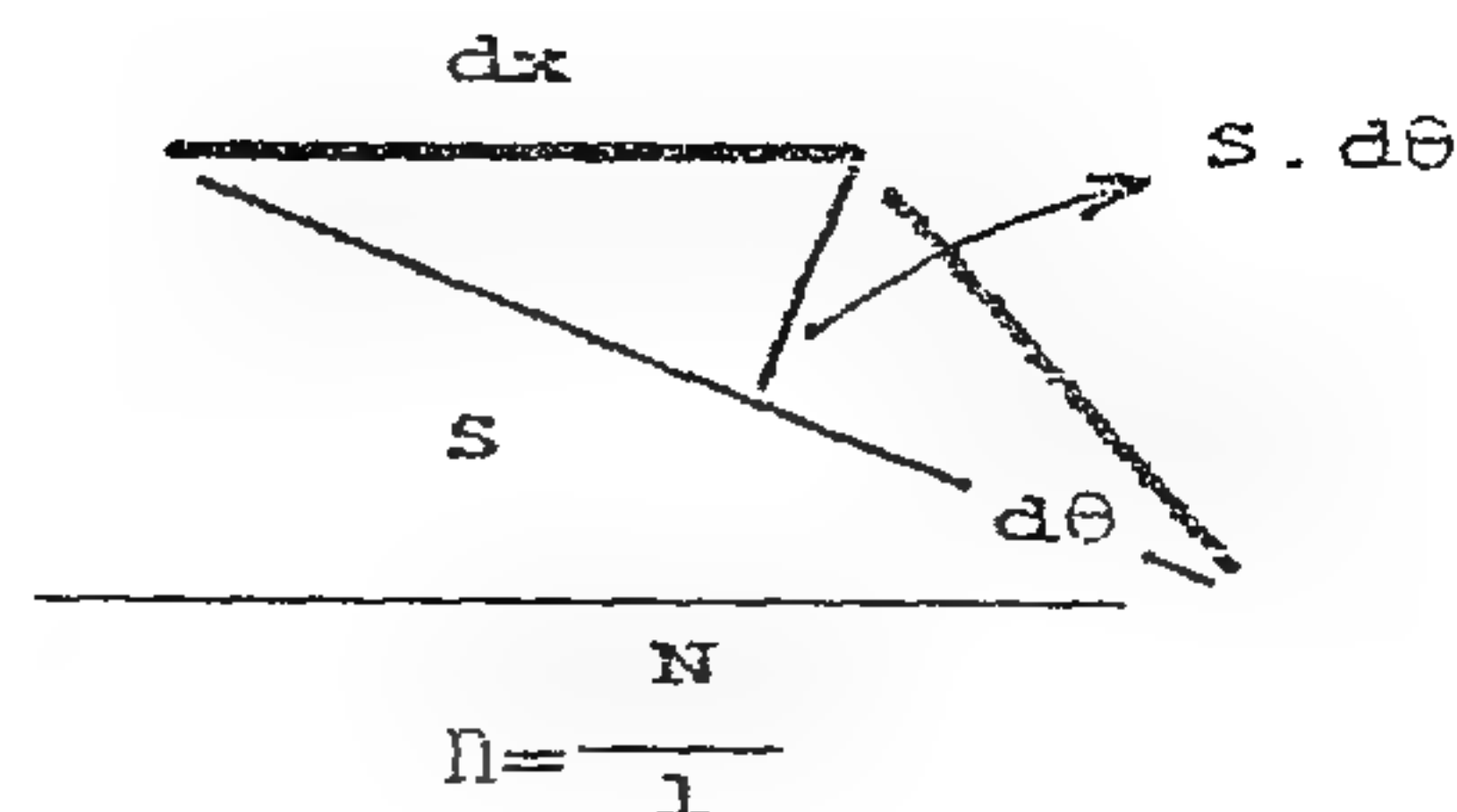
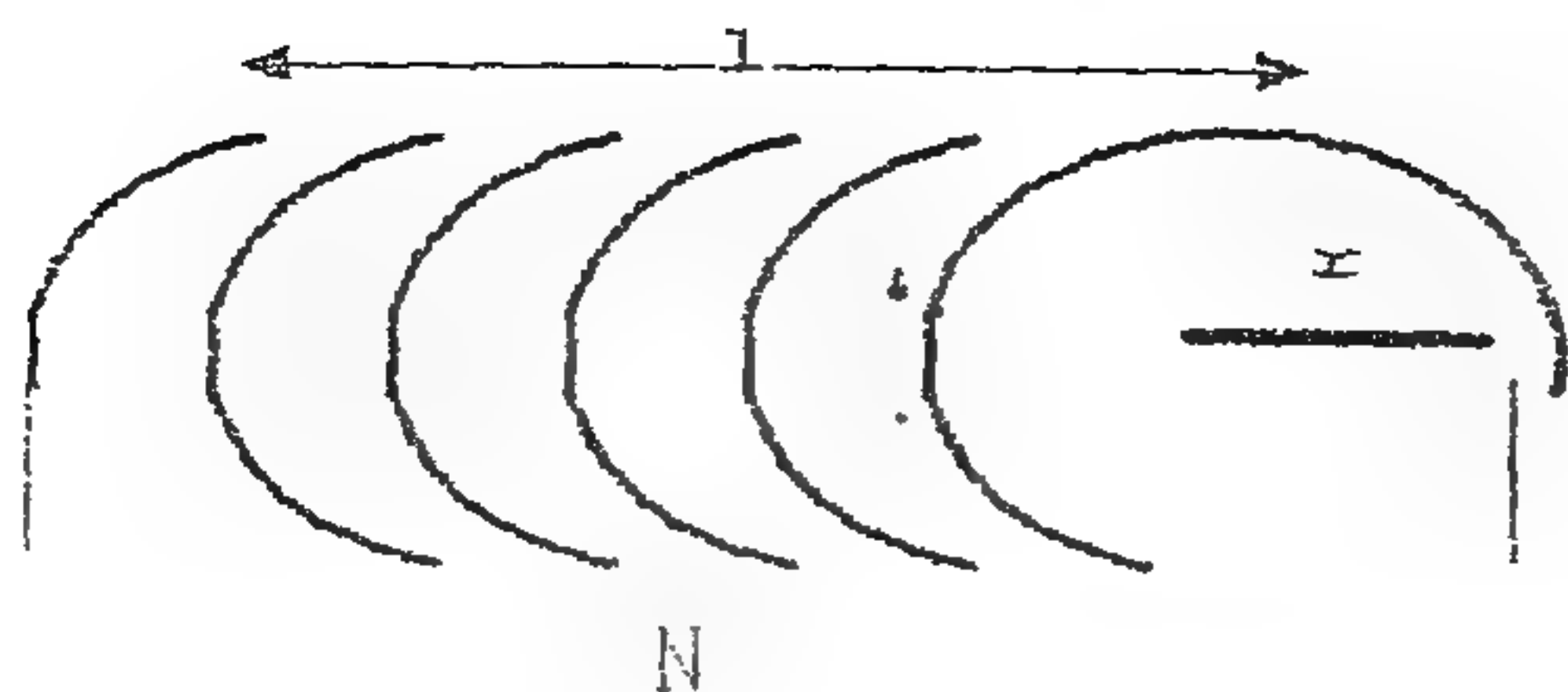
$$4 \quad \oint_{2 \cdot \pi \cdot r} H \cdot dl = I \quad H = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

FLUJO MAGNETICO INTERIOR EN EL CABLE COAXIAL

$$5 \quad \varphi = \iint_{\Sigma_\varphi} \mu \cdot \mu_0 \cdot H \cdot d\Sigma = \frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{b}{a}$$

INDUCTANCIA DISTRIBUIDA

$$6 \quad L(\text{Hy/m}) = \frac{\varphi}{I} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{2 \cdot \pi} \cdot \ln \frac{b}{a}$$



En un punto del eje del solenoide el campo está dado según la fórmula N° 5, dada en la página 52.

$$1 \quad H = \frac{I.r^2}{2.(x^2 + r^2)^{3/2}} \quad \text{La cantidad de espiras en } dx \text{ es } n.dx$$

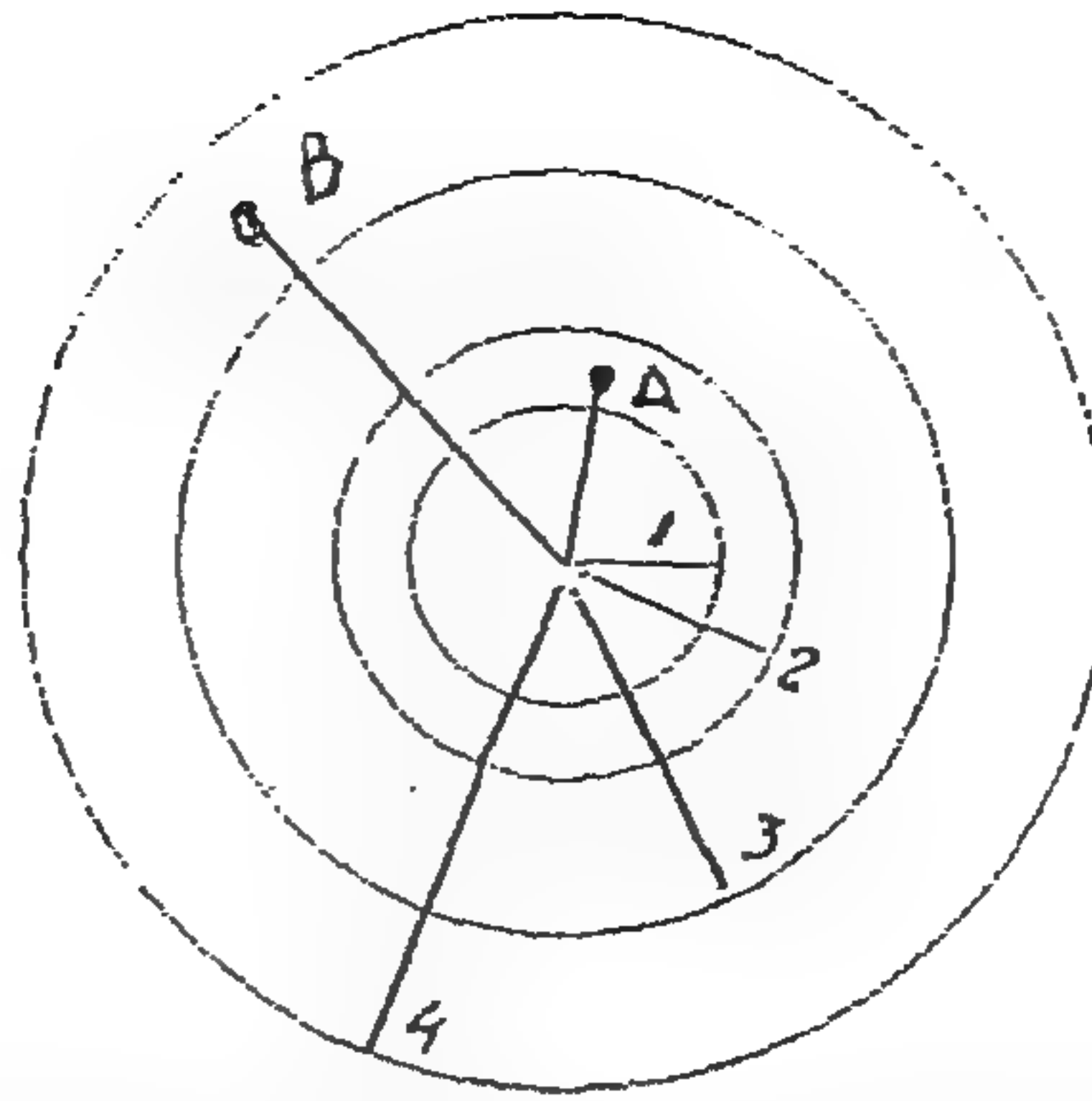
$$2 \quad \text{sen } \theta = \frac{S.d\theta}{dx} \quad \text{sen } \theta = \frac{r}{S} \quad dx = \frac{S^2.d\theta}{r}$$

$$3 \quad (x^2 + r^2)^{3/2} = S^3 \quad dH = \frac{I.r^2.n.dx}{2.S^3} = \frac{I.r^2.n.\frac{S^2.d\theta}{r}}{2.S^3}$$

$$4 \quad dH = \frac{I.r.n.d\theta}{2.S} = \frac{I.n}{2} \text{Sen } \theta.d\theta$$

Para cubrir todo a lo largo del solenoide debemos integrar entre 0 y π

$$5 \quad H = \int_0^\pi dH = \frac{I.n}{2} \int_0^\pi \text{Sen } \theta.d\theta = \frac{I.n}{2} (-\text{Cos } \theta)_0^\pi = I.n = \frac{I.N}{l}$$



Se trata de dos estratos esféricos concéntricos. El interior tiene el potencial A y el exterior tiene el potencial B.

Las cuatro superficies esféricas poseen las respectivas cargas y radios respectivos. Nos ubicamos en un punto interior del estrato interior a una distancia r del centro. El potencial en dicho punto:

$$U_A = \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{r_2} + \frac{Q_3}{r_3} + \frac{Q_4}{r_4}$$

El potencial en un punto interior del estrato exterior a una distancia r' del centro:

$$U_B = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{r'} + \frac{Q_4}{r_4}$$

Aplicando conceptos básicos de la electrostática:

$$Q_1 = 0 \quad Q_2 + Q_3 = 0$$

Con lo cual:

$$U_B = \frac{Q_4}{r_4}$$

Si restamos:

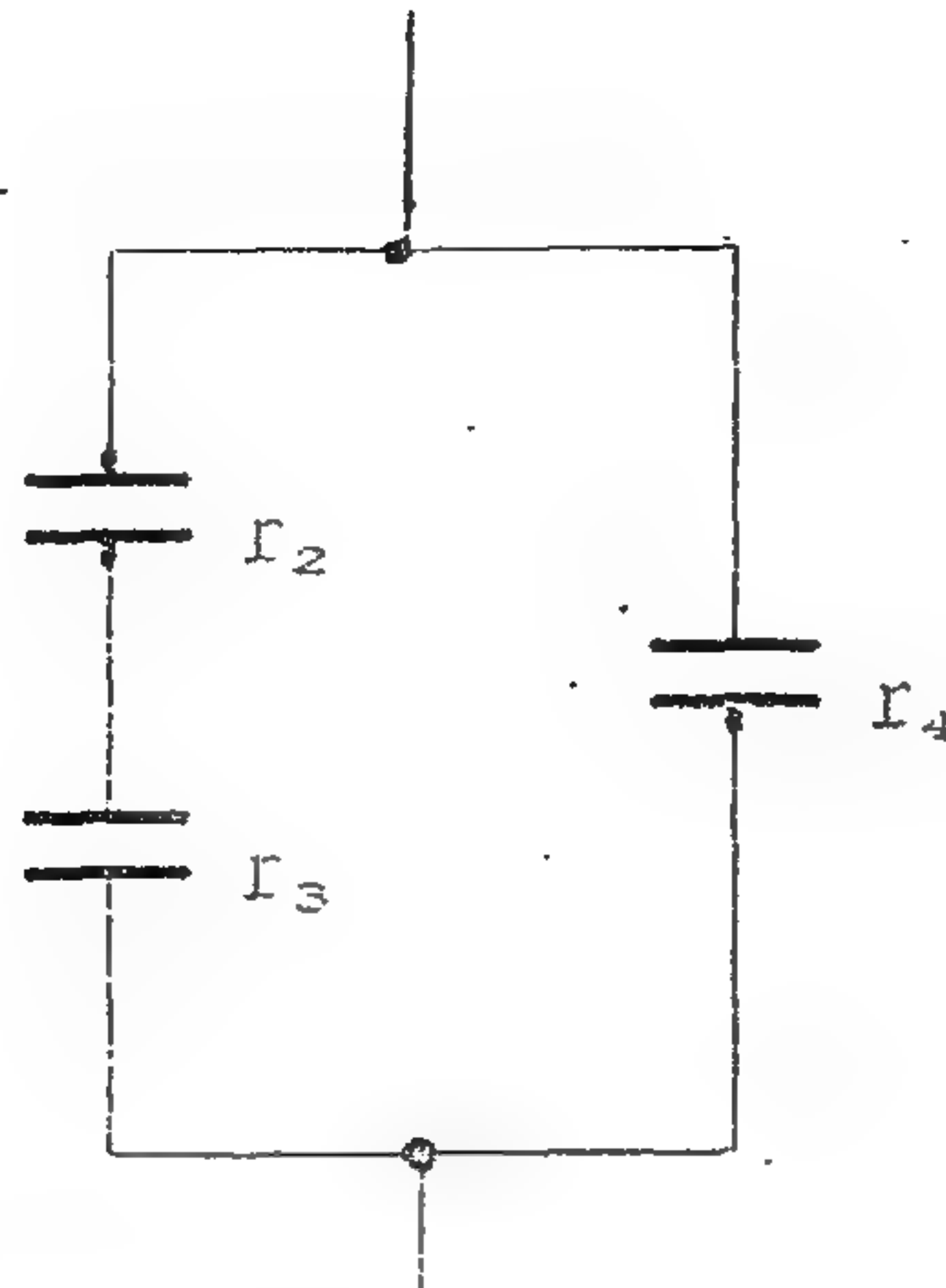
$$U_A - U_B = Q_2 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \right) \quad Q_2 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_3 - r_2} (U_A - U_B)$$

$$Q_4 = r_4 \cdot U_B \quad Q_3 = -\frac{r_2 \cdot r_3}{r_3 - r_2} (U_A - U_B)$$

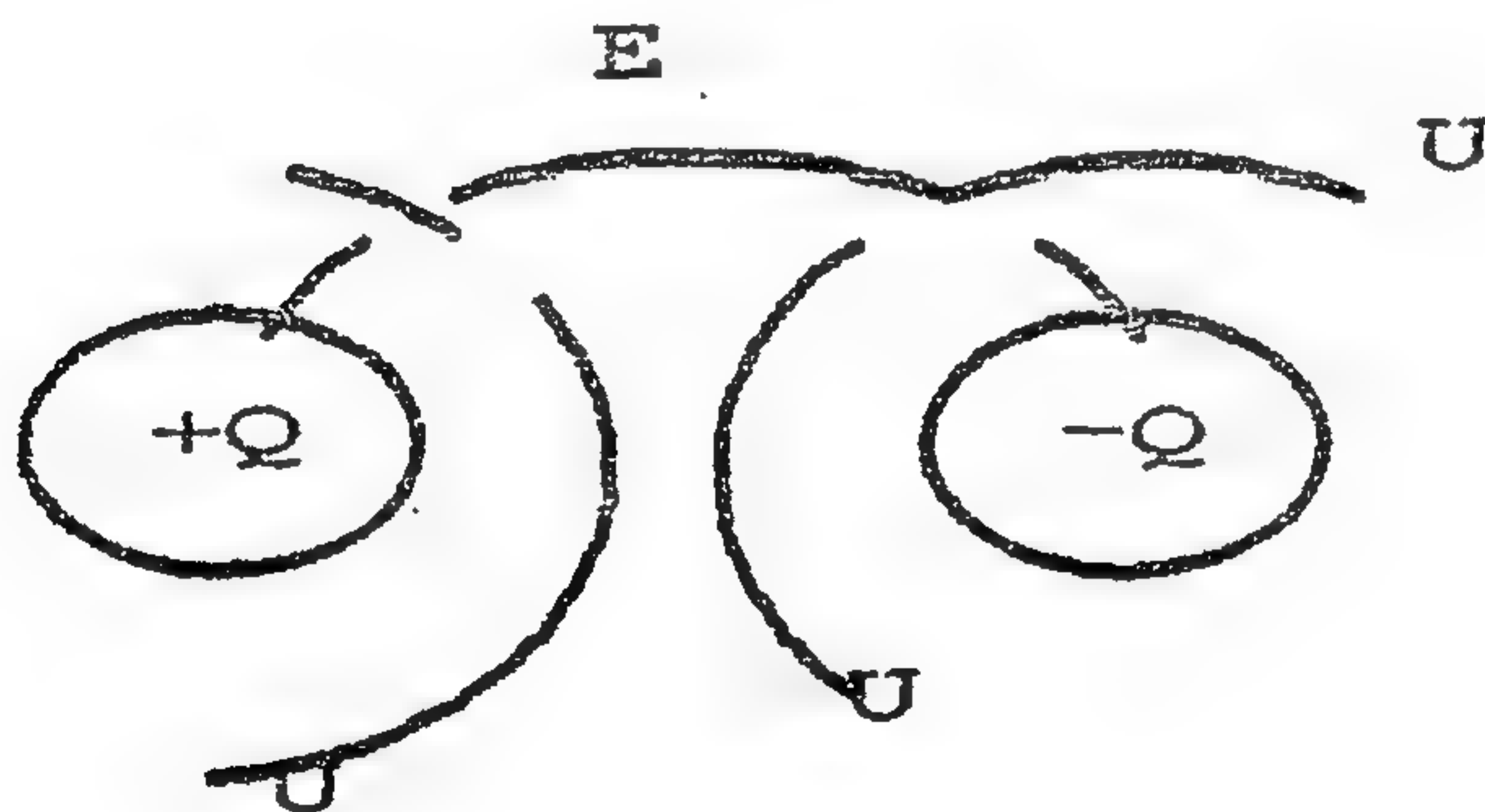
CAPACIDAD TOTAL

$$C_T = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_3 - r_2} + r_4$$

CIRCUITO EQUIVALENTE



Hadaad-Líneas de fuerza y equipotenciales



La condición que se corresponde con las líneas equipotenciales es: $\vec{E} * d\vec{r} = 0$

El vector Campo Electrico es: $\vec{E} = \vec{i}^0 k \frac{Q \cdot x}{r^3} + \vec{j}^0 k \frac{Q \cdot y}{r^3} + \vec{k}^0 k \frac{Q \cdot z}{r^3}$

El diferencial del vector de posición es: $d\vec{r} = \vec{i}^0 dx + \vec{j}^0 dy + \vec{k}^0 dz$

La primera expresion en el plano x-y es: $x \cdot dx + y \cdot dy = 0$

Resolviendo la ecuacion diferencial: $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = K$

Resulta la ecuación de infinitas circunferencia cuyas coordenadas del centro es el origen de coordenadas x-y.

En la próxima Sección veremos que las líneas del Campo Electrico son ortogonales a las líneas equipotenciales.

La condición que se corresponde con las líneas del Campo E es:

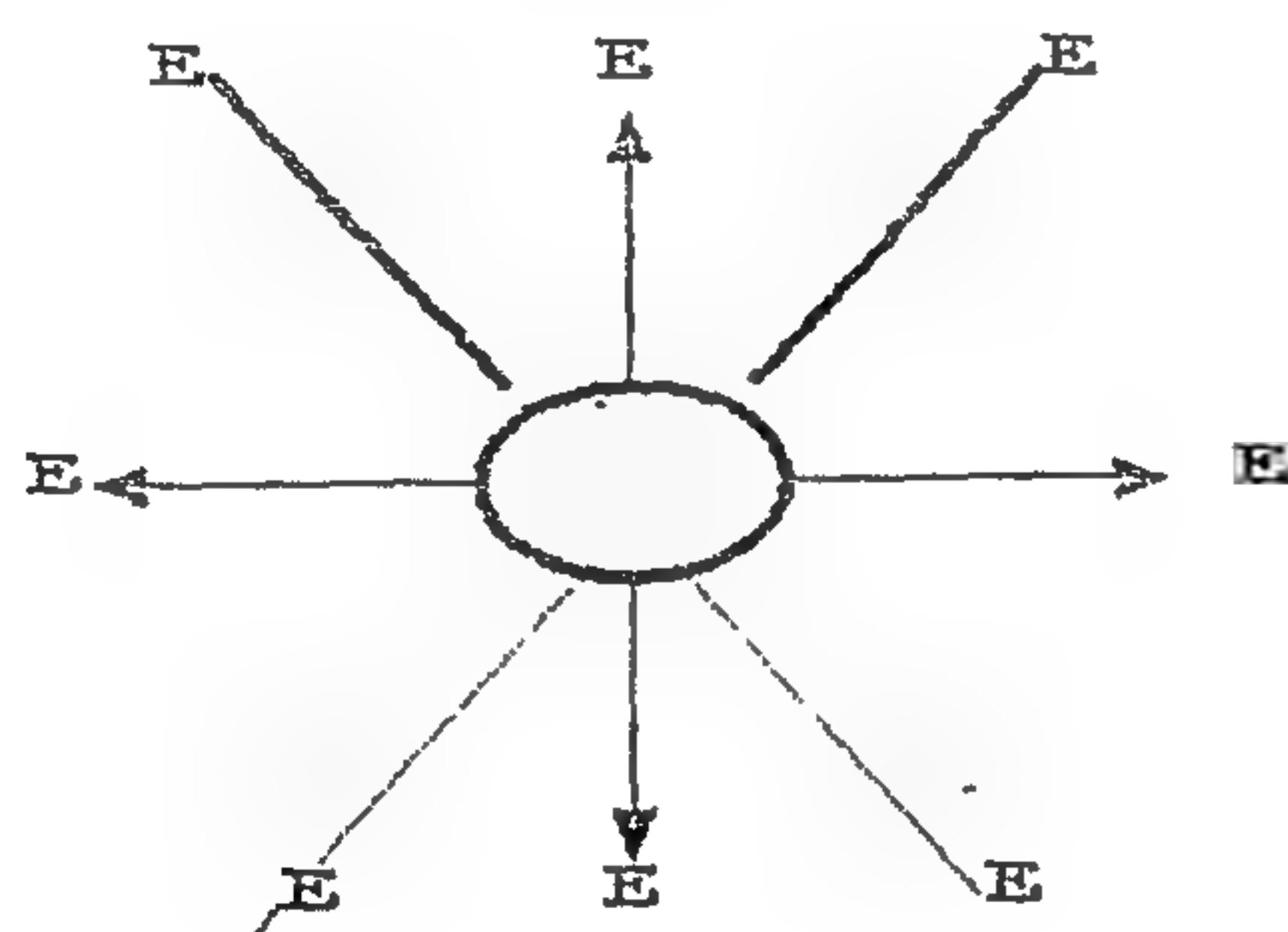
$$\vec{E} \times d\vec{r} = 0$$

Ahora el producto es vectorial.

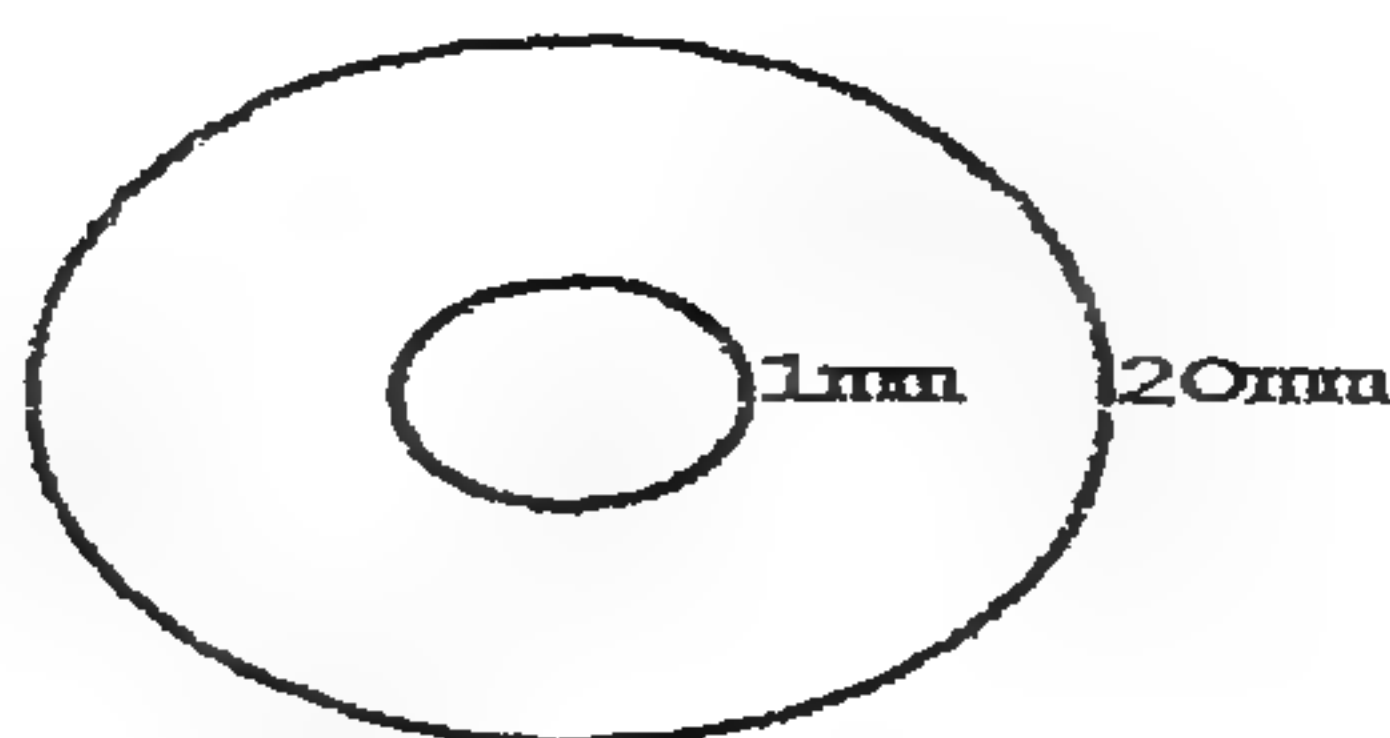
$$\begin{vmatrix} \vec{i}^0 & \vec{j}^0 & \vec{k}^0 \\ \frac{x}{r^3} & \frac{y}{r^3} & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}^0 \begin{vmatrix} x & y \\ r^3 & r^3 \end{vmatrix} = \vec{k}^0 (x \cdot dy - y \cdot dx) = 0$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \ln y = \ln x + \ln k \quad \ln \frac{y}{x} = \ln k \quad \frac{y}{x} = k$$

$y = k \cdot x$ Se trata de la ecuación de infinitas rectas.



Hallar la función potencial y la intensidad de campo eléctrico para la región entre dos cilindros circulares rectos concéntricos, donde $V=0$ para $r=1\text{mm}$ y $V=150\text{v}$ para $r=20\text{mm}$.



solucion

$$\nabla^2 U = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\frac{d \left(h_2 h_3 \frac{dU}{dr} \right)}{dr} \right) = \frac{1}{1 * r * 1_3} \left(\frac{d \left(r * 1 \frac{dU}{dr} \right)}{dr} \right) = 0$$

$$r * \frac{dU}{dr} = K_1$$

$$dU = K_1 * \frac{dr}{r} \quad U = K_1 * \ln r + K_2$$

Aplicando las condiciones de contorno:

$$U = 50 * \ln r + 345,9 \quad E = -\frac{50}{r} (V/m)$$

Podemos obtener y calcular la densidad de carga superficial en cada cilíndrico.

$$\rho_{z1} = 8,85 \times 10^{-12} \times \frac{50}{.001} = 442,5 \times 10^{-9} \text{Coul} / m^2$$

$$\rho_{z2} = 8,85 \times 10^{-12} \times \frac{50}{.020} = 22,125 \times 10^{-9} \text{Coul} / m^2$$

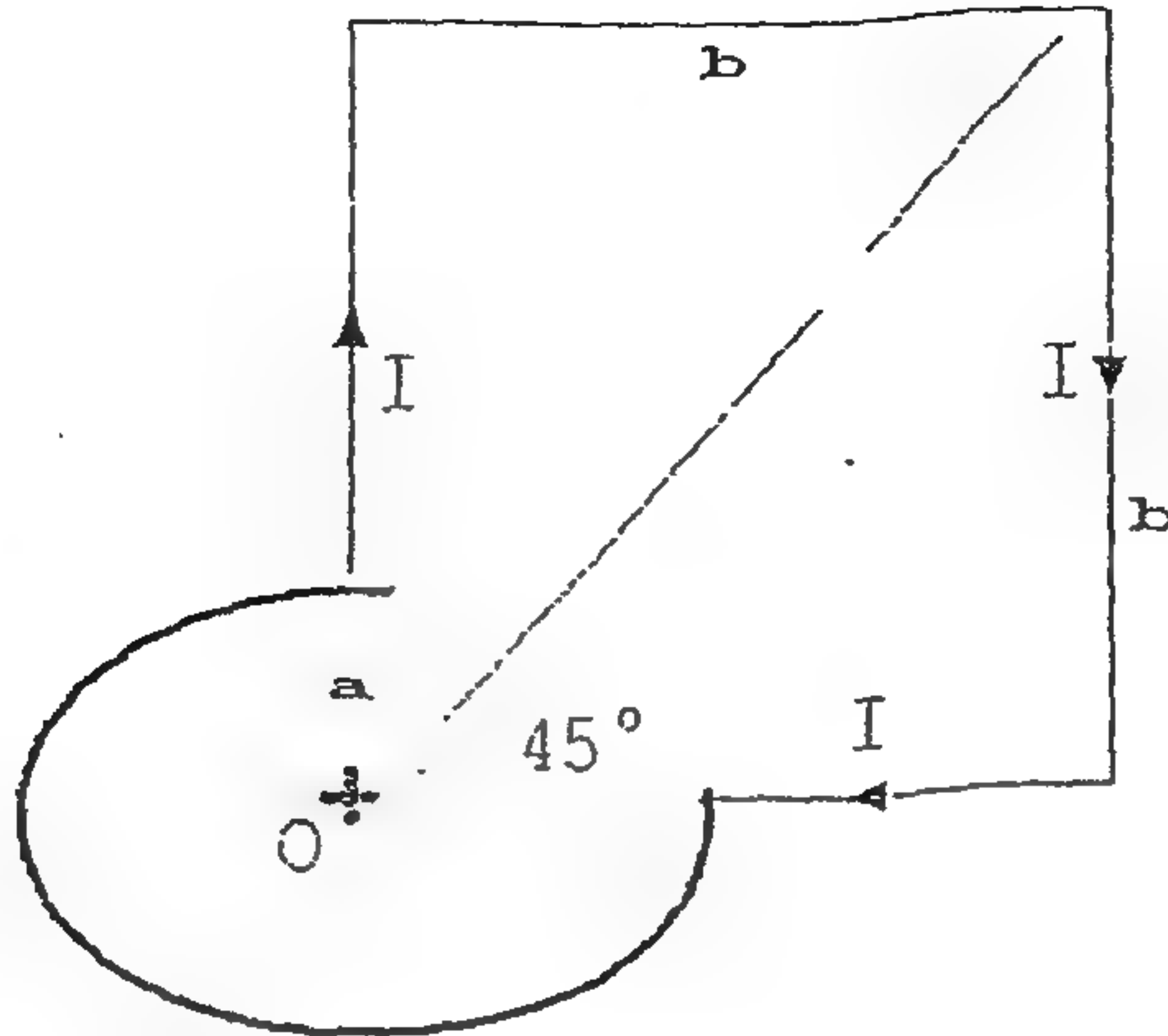
Aplicando un potencial $250 \times \text{Sen}377t$ a un capacitor coaxil
 $a = 5\text{mm}$ $b = 6\text{mm}$ $\epsilon = 6.7$ longitud = 500mm .
 Se pide la corriente de desplazamiento.

$$U = 250 \frac{\text{Sen}377t}{\ln \frac{6}{5}} \times \ln \frac{r}{0,006}$$

$$E = -\frac{dU}{dr} \quad \epsilon \cdot \epsilon_0 \times E = D \quad J_D = \frac{dD}{dt} \quad I_D = J_D \times 2 \cdot \pi \cdot r \cdot L$$

$$I_D = 9,63 \times 10^{-5} \times \text{Cos}377t (\text{A/m}^2)$$

- Se trata de encontrar el campo magnético en el punto O. Vertice de un cuadrado de lado "b" y centro de una circunferencia mutilada de radio "a=b/2".
Las contribuciones al campo en dicho punto son las provenientes de las corrientes en los 2 tramos de longitud "b" y la correspondiente al tramo restante de la circunferencia.



- a).-La contribución proveniente de los dos tramos de longitud "b":

$$2 \times \frac{I}{4\pi b} \times \text{Sen} 45^\circ = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{4\pi b}$$

- b).-La contribución de la circunferencia mutilada.

$$\frac{I}{2a} \times \frac{3}{4} = \frac{3I}{8a}$$

reducción del 50%.

La falta de corriente en ese cuarto de circunferencia implica una

Por ello: $\frac{3I}{16a}$

Sumamos las dos contribuciones:

$$H_0 = \frac{I \cdot \sqrt{2}}{4\pi b} + \frac{3I}{16a} = \frac{I}{4\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{b} + \frac{3\pi}{4a} \right)$$

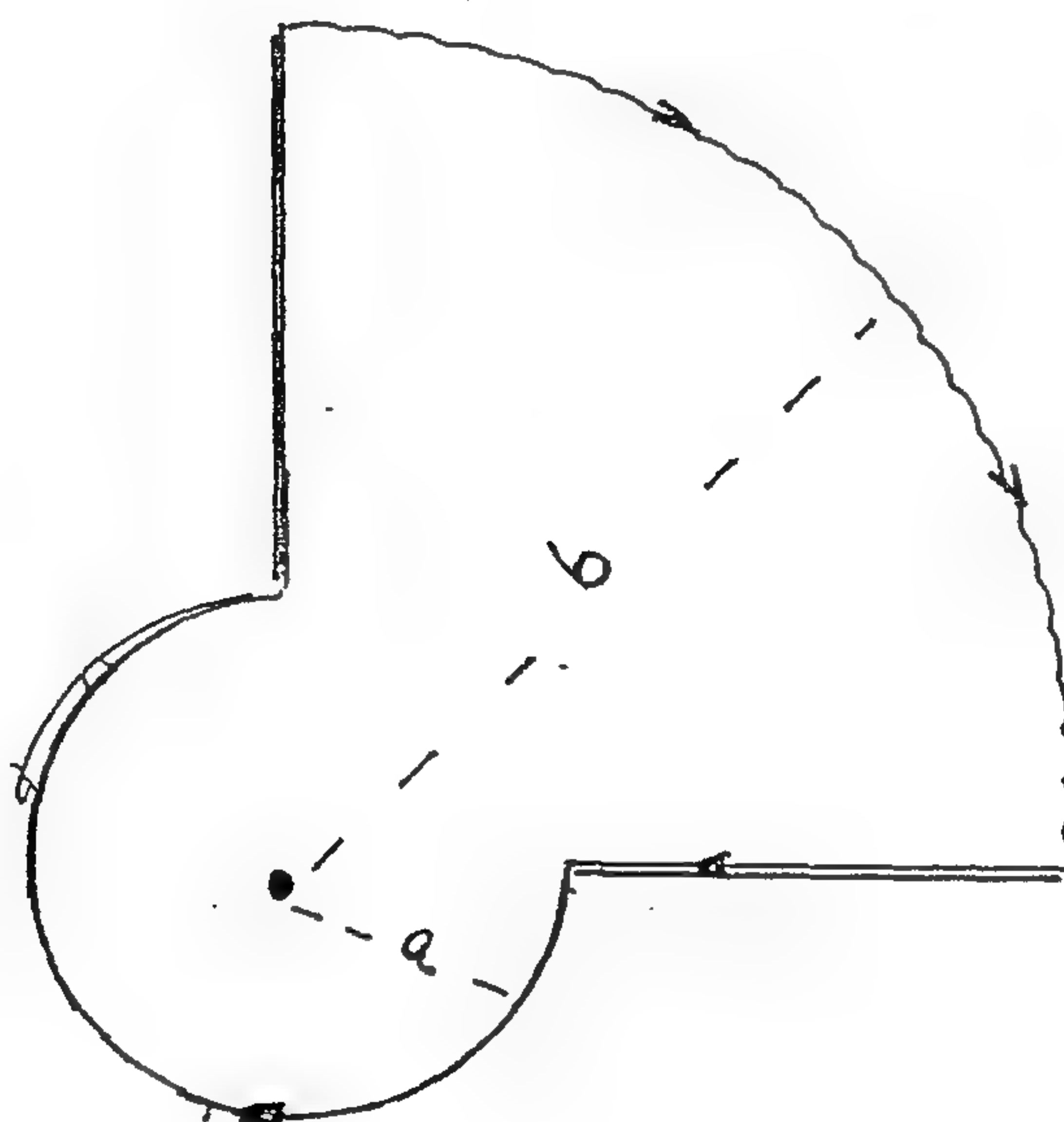
Se trata ahora de calcular el campo en un punto donde coinciden los centros de 2 circunferencias. Una de radio "b" y el otro de radio "b/2".

El de radio "b", tiene mutilada las $\frac{3}{4}$ partes mientras que el de radio "b/2", tiene mutilada una $\frac{1}{4}$ parte.

SOLUCION

La resultante en dicho centro común:

$$\frac{I}{2.a} \times \frac{3}{4} + \frac{I}{2.b} \times \frac{1}{4} = \frac{I}{4.\pi} \left(\frac{\frac{3}{2}.\pi}{a} + \frac{\frac{\pi}{2}}{b} \right) = \frac{I}{8} \left(\frac{3}{a} + \frac{1}{b} \right)$$



1º.-Si un cuerpo esférico de radio $a = 2\text{cm}$, se halla dotado de una distribución uniforme de carga volumétrica de $10^{-12}\text{Coul}/\text{m}^3$ y se encuentra sumergido dentro de un fluido dieléctrico cuya constante dieléctrica vale $\varepsilon = 6$, obtener y calcular : a).-Campo Electrico a 1cm del centro de dicho cuerpo.b).-Potencial a 1cm del centro de dicho cuerpo.

2º.-Una señal electromagnética que se propaga en el espacio libre con una constante de fase $\beta_0 = 0,453\text{rad}/\text{cm}$, cambia su valor a $\beta_1 = 0,906\text{rad}/\text{cm}$, cuando se introduce en un medio dieléctrico de constante ε_1 . Se pide obtener y calcular : a).- ε_1 , b).-frecuencia "f" de la señal.

3º.Cuando la densidad de carga volumétrica carece de dependencia temporal, la ecuación de continuidad se reduce a una ley de la teoría de circuitos.¿Cual es?. Justificar

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_c + \frac{d\rho_r}{dt} = 0$$

4º.-Las especificaciones técnicas de un cable coaxial RG indican que tiene una impedancia característica de 75ohms y una atenuacion de $0,035\text{Neper/m}$. Se.piden los valores del radio mayor(b) y el radio menor(a).

HADAD EDUARDO

GUIAS DE ONDA

HECHO EL DEPOSITO QUE MARCA LA LEY 11723
I.S.B.N. N° 950-42-0020-6
HADAD EDUARDO

MEDIOS DE HIPERFRECUENCIA

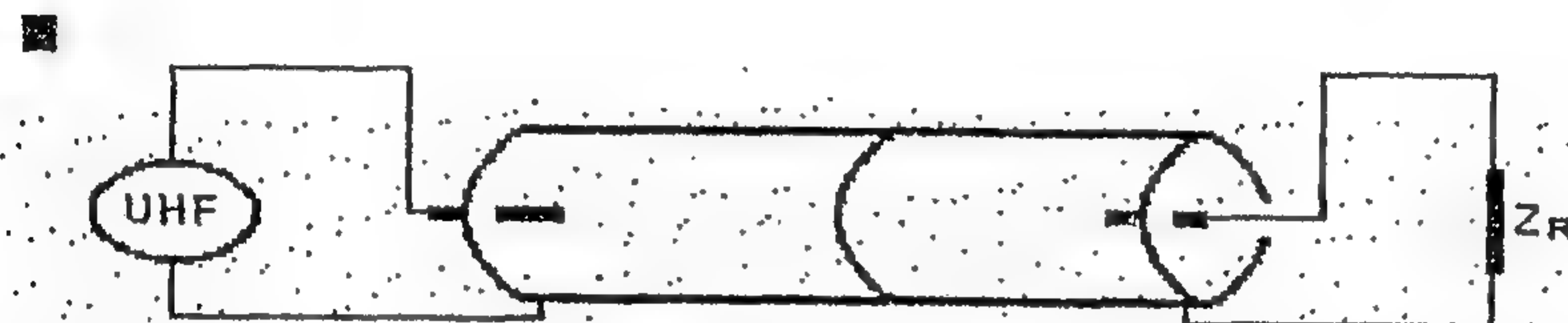
El uso paulatino de las altas frecuencias ha despertado la presencia de fugas en los materiales dieléctricos.

Los cables coaxiales, cuyo nervio central requiere de dicho material para mantener su ubicación, pierden utilidad.

Cuando la frecuencia a transmitir, supera los 2.5Gigahertz se procede a extraer el nervio central del cable con lo cual se crea la denominada guía de onda.

El procedimiento se basa en que para dicha frecuencia la densidad de corriente de desplazamiento prepondera sobre la densidad de corriente de conducción.

1) $J_D > J_C$



La señal de UHF, es irradiada al espacio interior por el vástago del conector introducido en un extremo. Tras sucesivas reflexiones en la cubierta metálica de la guía, la misma es propagada y recepcionada por el vástago del conector introducido en la otra punta.

La propagación interna se realiza en función de las condiciones de contorno del campo electromagnético.

a). La componente tangencial del Campo Eléctrico es nula.

2) $E_T = 0$

b). La componente Normal del Campo Magnético es nula.

3) $H_N = 0$

La señal propagada se la considera armónica y está determinada por el factor:

4) $e^{j(\omega \cdot t - \beta_g \cdot y)}$

donde: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f_0$ y β_g es la constante de fase de la señal en la guía.

De dicho factor surgen los operadores diferenciales, temporal y espacial.

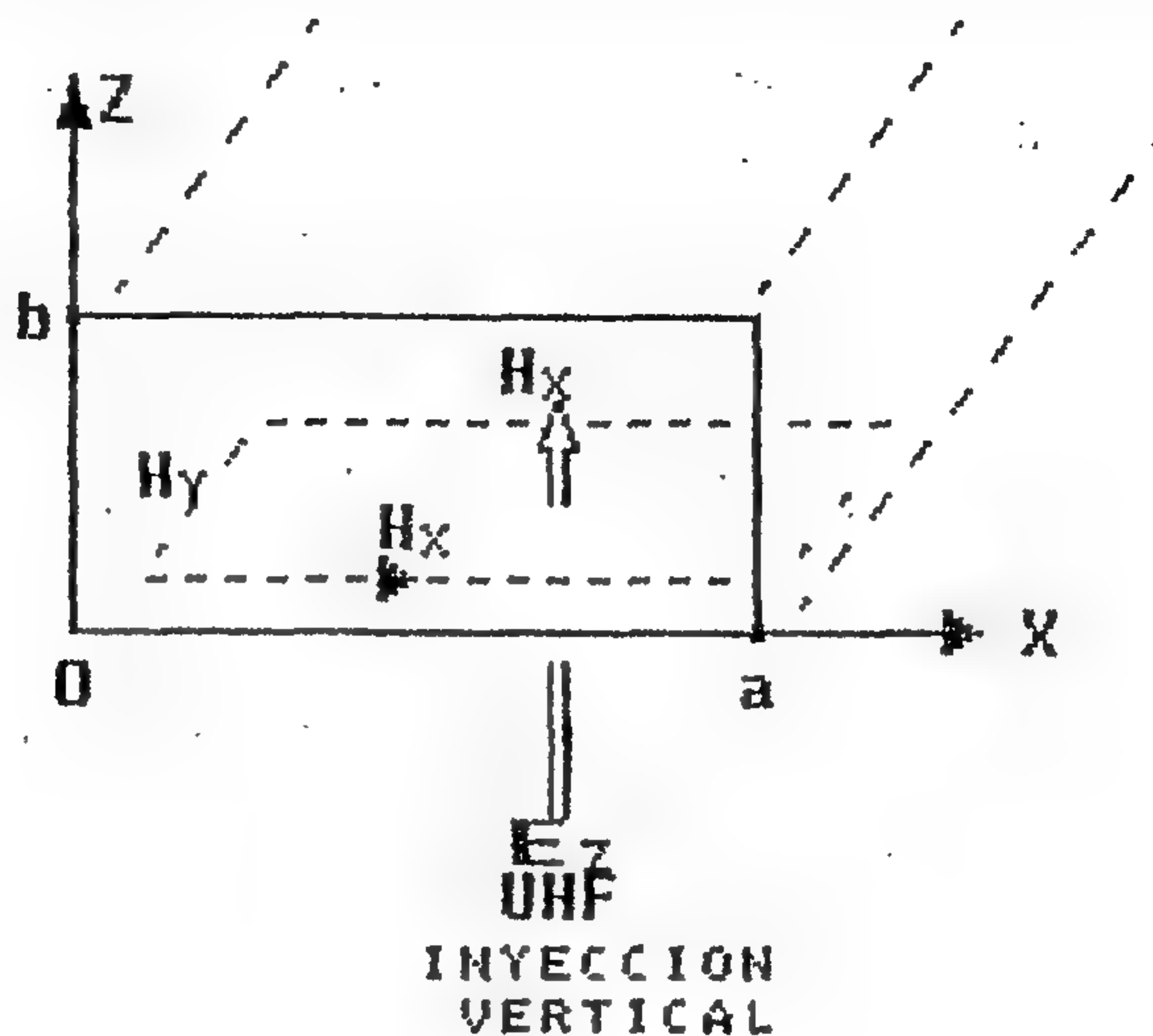
$$\frac{d}{dt} = j \cdot \omega \qquad \frac{d}{dy} = j \cdot \beta_g$$

CONEXION TE-TRANSVERSAL ELECTRICO-

EL CAMPO ELECTRICO-SE INYECTA DE MODO VERTICAL

TE₁₀

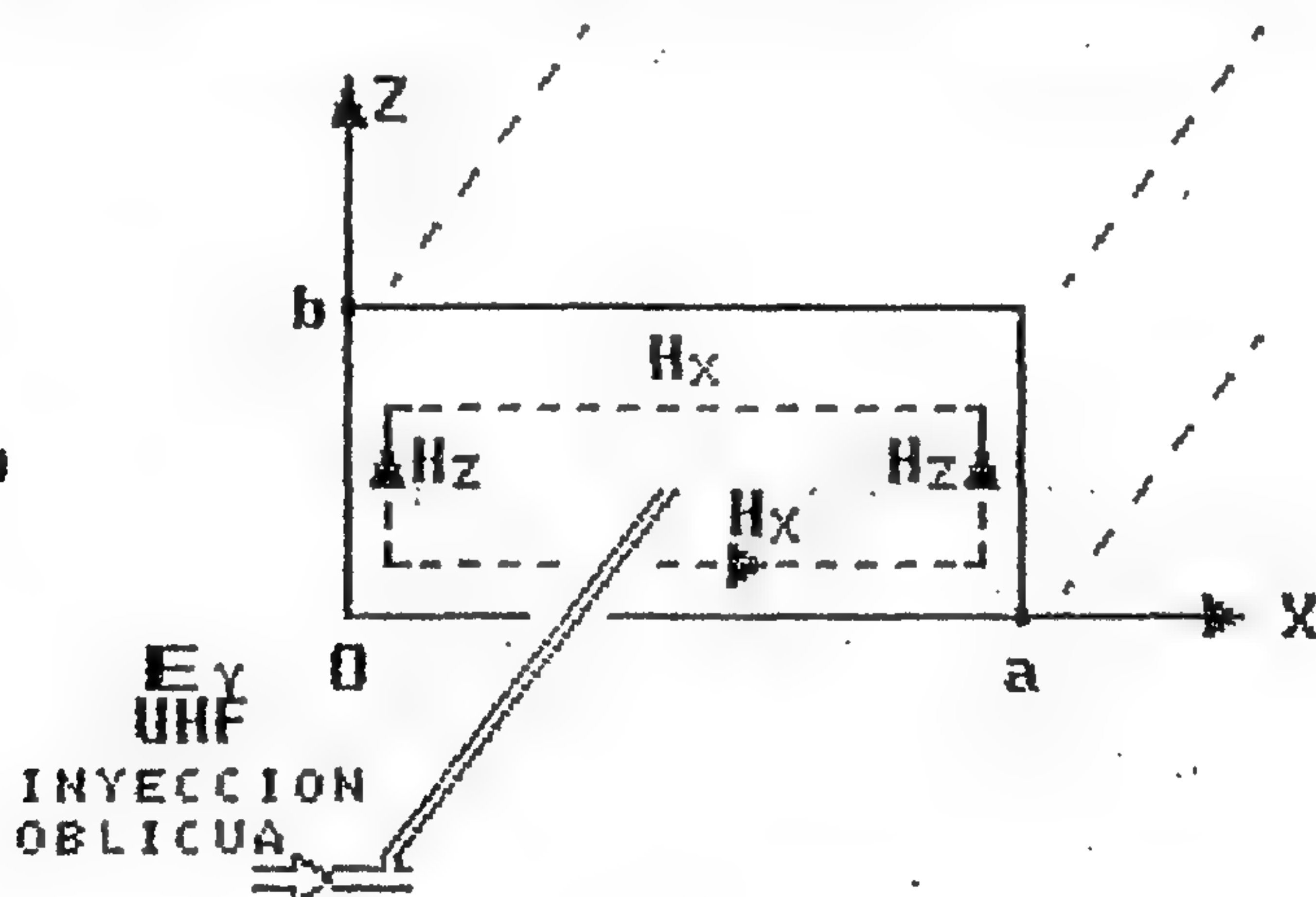
Fig.1a



CONEXION TM-TRANSVERSAL MAGNETICO-

EL CAMPO ELECTRICO SE INYECTA DE MODO OBLICUO SIGUIENDO LA DIRECCION DE PROPAGACION

Fig.1b



FRENTES DE ONDA TE y TM

LA COMPONENTE LONGITUDINAL DEL CAMPO MAGNETICO

HY ARRASTRA EL FRENTE DE ONDA TE

LA COMPONENTE LONGITUDINAL DEL CAMPO ELECTRICO

EY ARRASTRA EL FRENTE DE ONDA TM

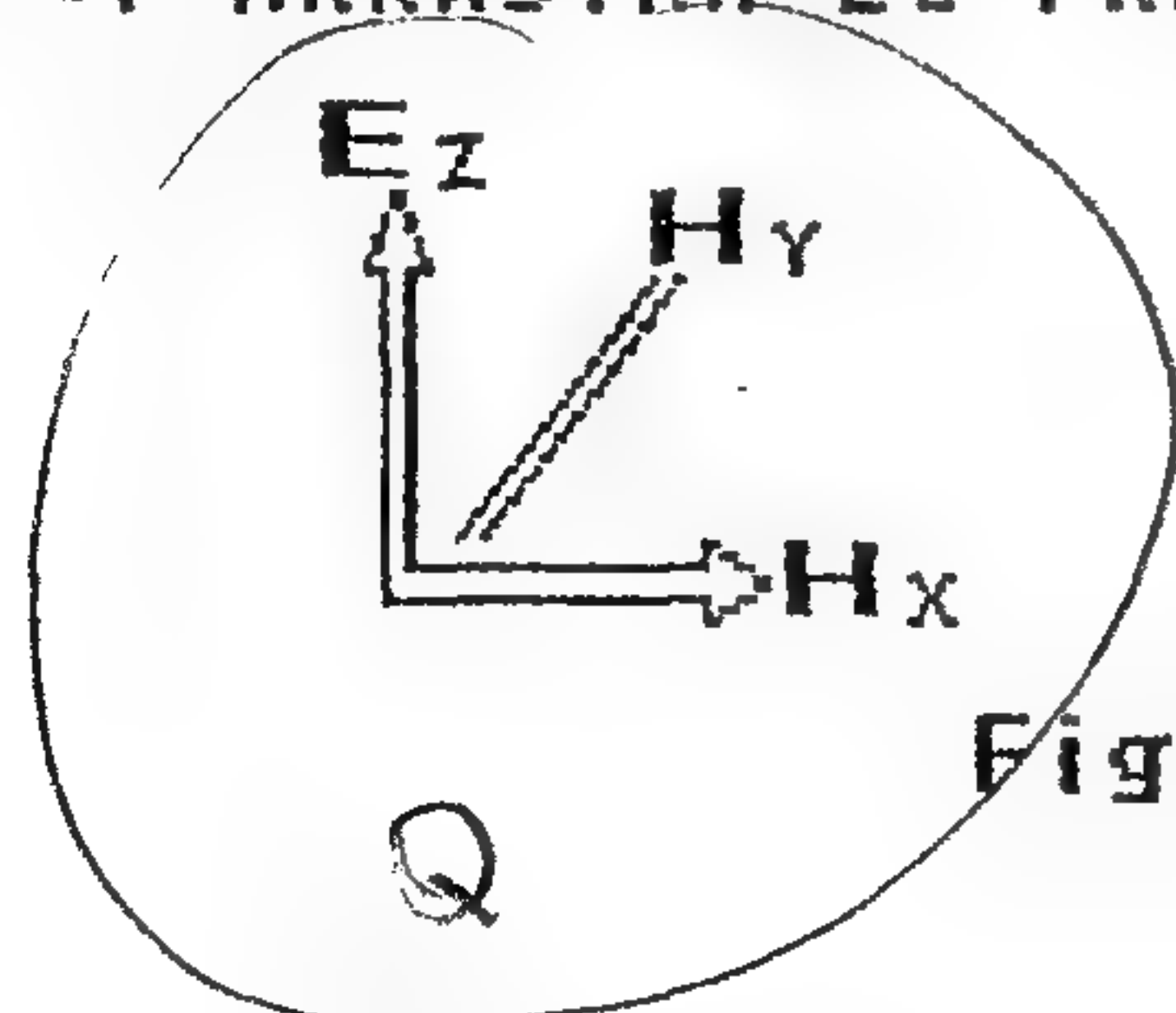


Fig.1c



indivisible

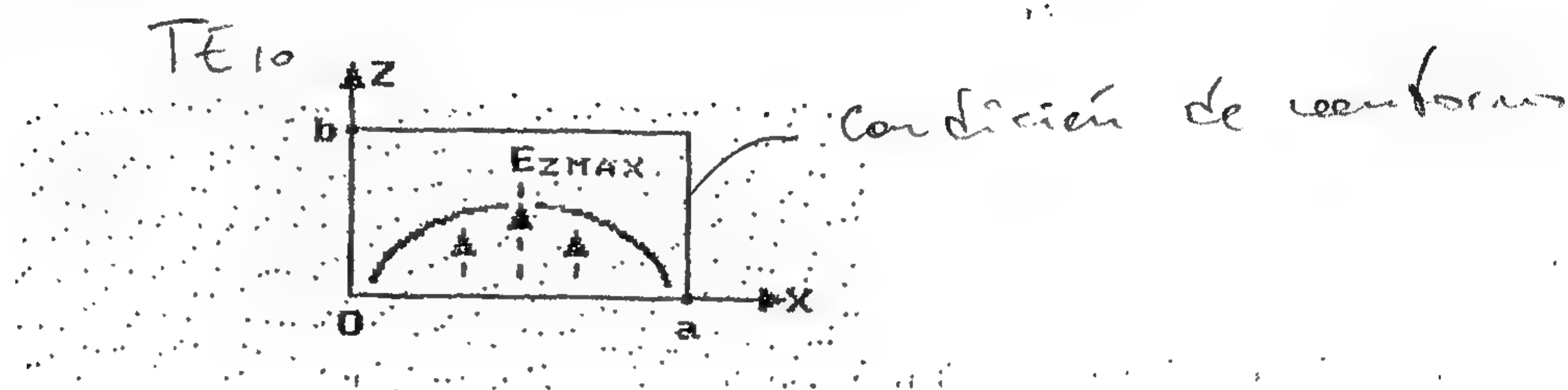
MODOS TRANSVERSALES ELÉCTRICOS 10

Distribución del Campo Eléctrico Transversal

Nos referimos a la figura 1.a-Página 2.

La señal irradiada por el conductor introducido en la guía, genera una diferencia de potencial U (volt), entre techo y piso, la que es máxima en la parte central y cero en los extremos.

Todo ello en concordancia con la distribución del campo eléctrico, el que de acuerdo a las condiciones de contorno siendo vertical, debe ser nulo en los extremos donde se hace tangencial.



Se verifica que:

$$5) \quad E_z(0) = 0 \quad E_z\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{U}{b} \quad E_z(a) = 0$$

La señal es armónica, por lo que matemáticamente es representada por:

$$6) \quad E_z = \frac{U}{b} \cdot \text{Sen}(\beta \cdot x)$$

Si aplicamos las condiciones de contorno:

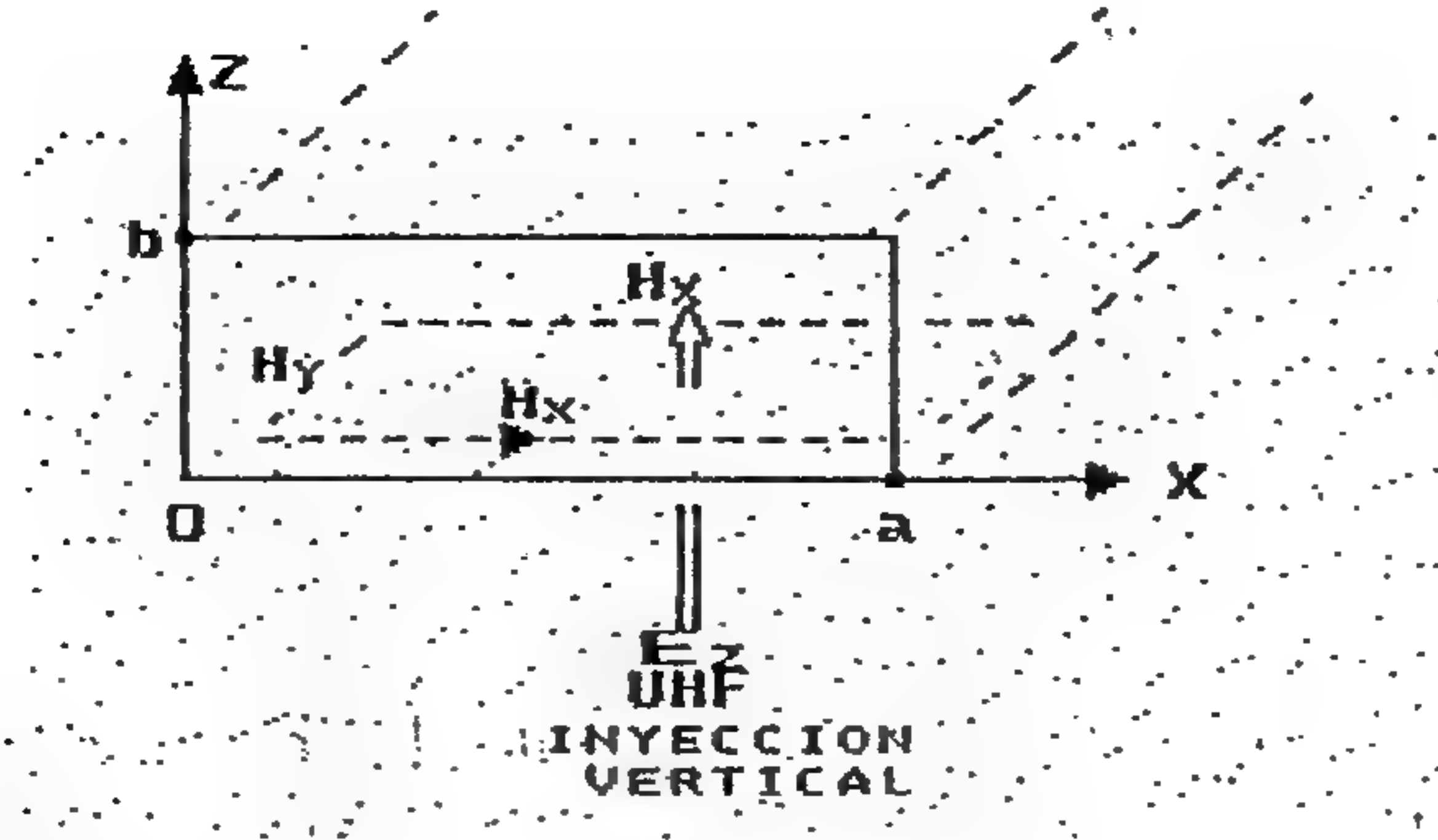
$$7) \quad 0 = \frac{U}{b} \cdot \text{Sen}(\beta \cdot a) \quad \beta \cdot a = 0 \quad \beta \cdot a = \pi$$

Queda en claro que la constante de fase β , resulta ser la de corte.

$$8) \quad \beta_c = \frac{\pi}{a} \quad \text{con lo cual} \rightarrow E_z = \frac{U}{b} \cdot \text{Sen}(\beta_c \cdot x)$$

Distribución del Campo Magnético Transversal

Como podemos apreciar en la figura, el campo magnético transversal es máximo en la zona central y es nulo en los extremos, tal las condiciones de contorno.

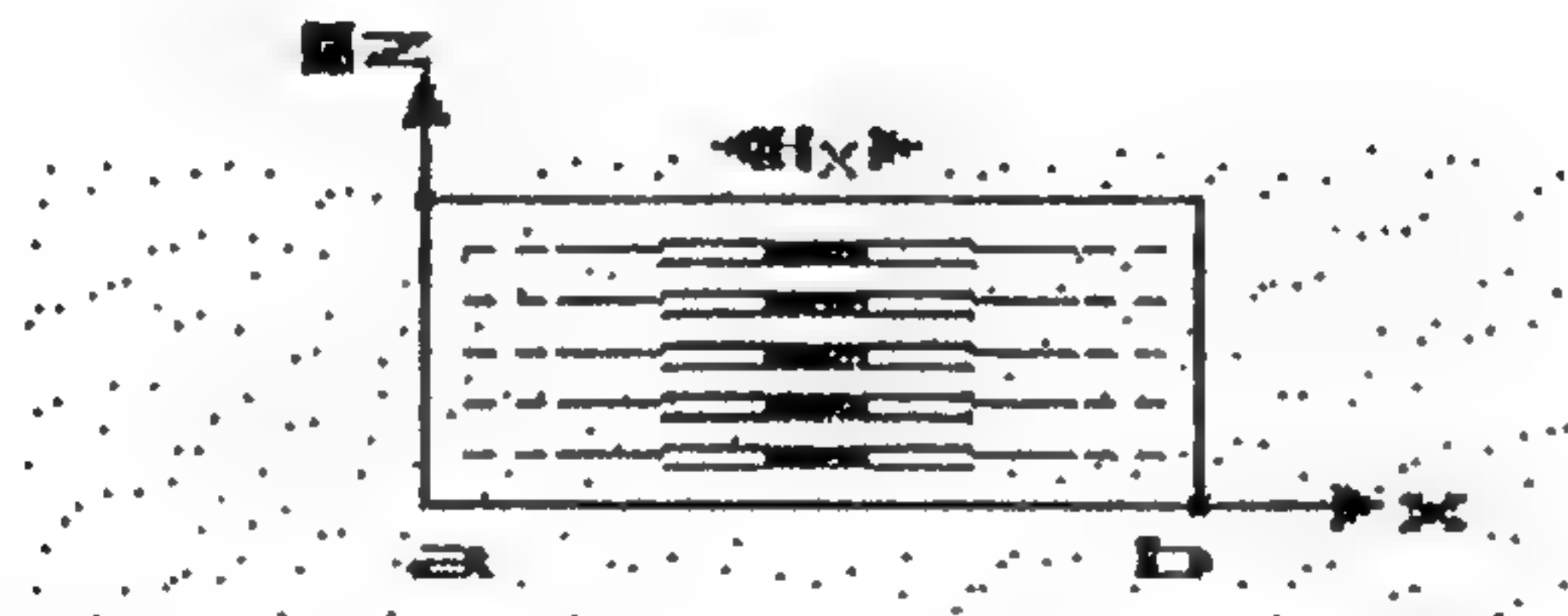


9) $H_x = \frac{I}{a} \cdot \text{Sen}\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$

Las componentes dadas por las ecuaciones 8 y 9, constituyen el frente de onda que se propaga internamente en la dirección de propagación según el factor dado por la ecuación 4.

La impedancia de la onda está expresada por ley de Ohm.

10) $Z_{TE} = \frac{E_z}{H_x} = \frac{U \cdot a}{I \cdot b}$

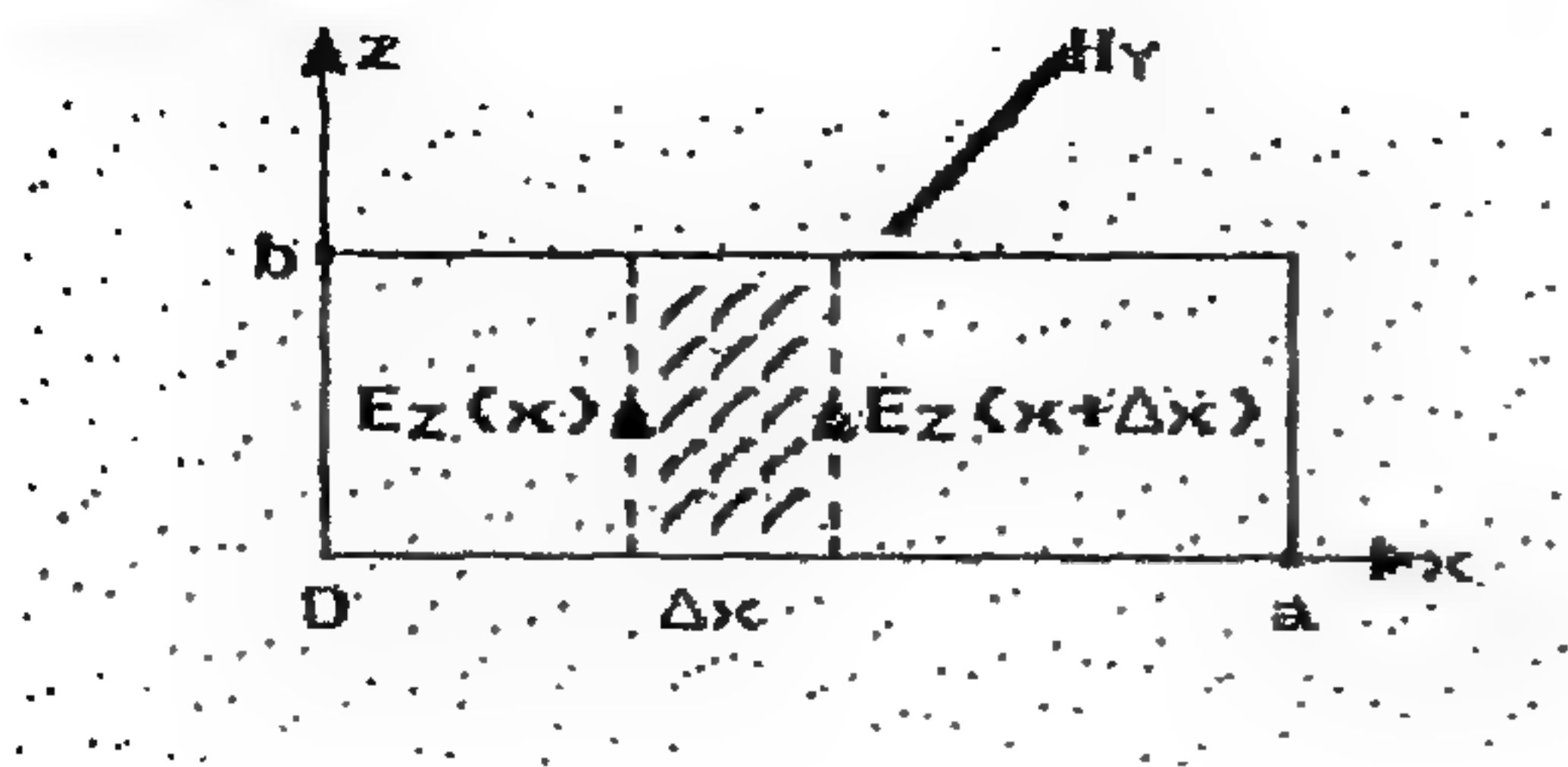


Distribución Del Campo Magnético, Longitudinal

Aplicamos la ley de Maxwell-Faraday.

11) $\oint E \cdot dl = - \frac{d\phi}{dt}$

Elegimos una trayectoria de integración



$$12) \quad b \cdot E_z(x) - b \cdot E_z(x + \Delta x) = -J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_y \cdot b \cdot \Delta x$$

$$13) \quad \frac{E_z(x) - E_z(x + \Delta x)}{\Delta x} = -J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_y$$

$$14) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{E_z(x) - E_z(x + \Delta x)}{\Delta x} = -\frac{dE_z}{dx} = -J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_y$$

Por último,

$$15) \quad \frac{dE_z}{dx} = J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_y$$

De donde, despejamos la expresión de la componente longitudinal del campo magnético.

$$16) \quad H_y = \frac{1}{J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0} \cdot \frac{dE_z}{dx} = \frac{U \cdot \pi}{J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot a \cdot b} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{a} \cdot x\right)$$

Se observa que las componentes longitudinales en los extremos guardan la siguiente relación;

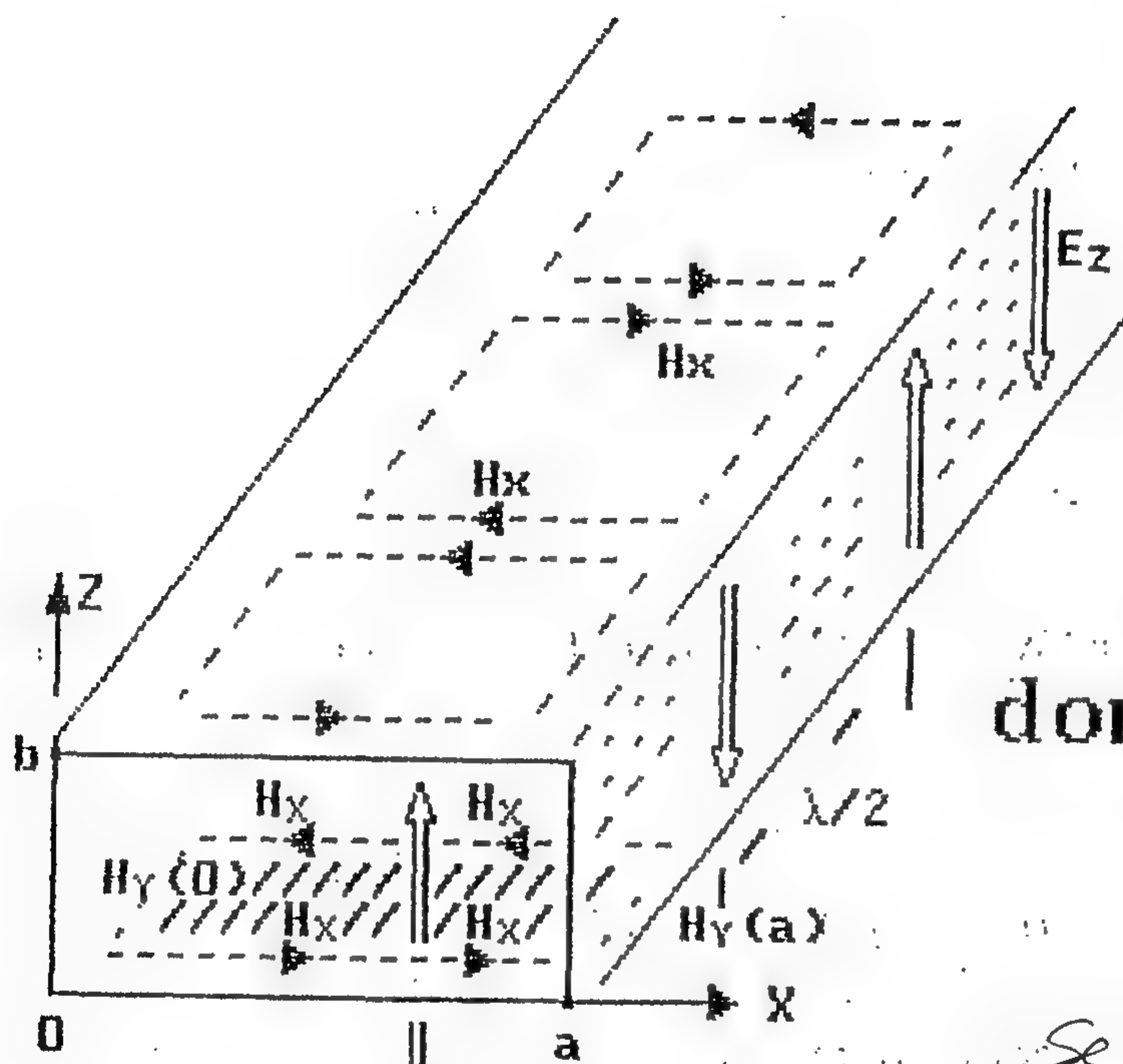
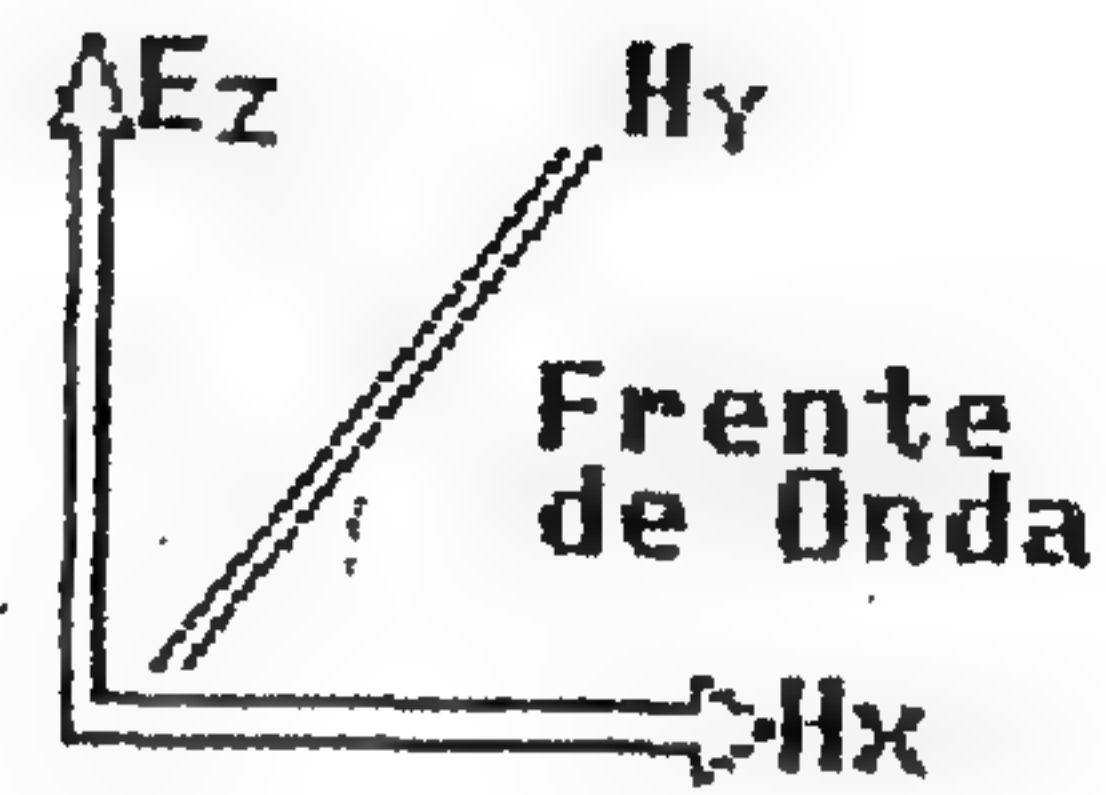
$$17) \quad H_y(0) = -H_y(a)$$

Ello, permite conocer su valor:

$$18) \quad H_y(0) = \frac{U \cdot \pi}{J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot a \cdot b}$$

Esta última expresión permite apreciar la presencia de un fenómeno inductivo determinado por una inductancia distribuida dada por;

$$19) \quad L(H_y / m) = J \omega \mu \cdot \mu_0 \cdot a \cdot b / \pi$$



**TE_{10}
modo
dominante**

$$\lambda_{c10} = 2a$$

Se des p120

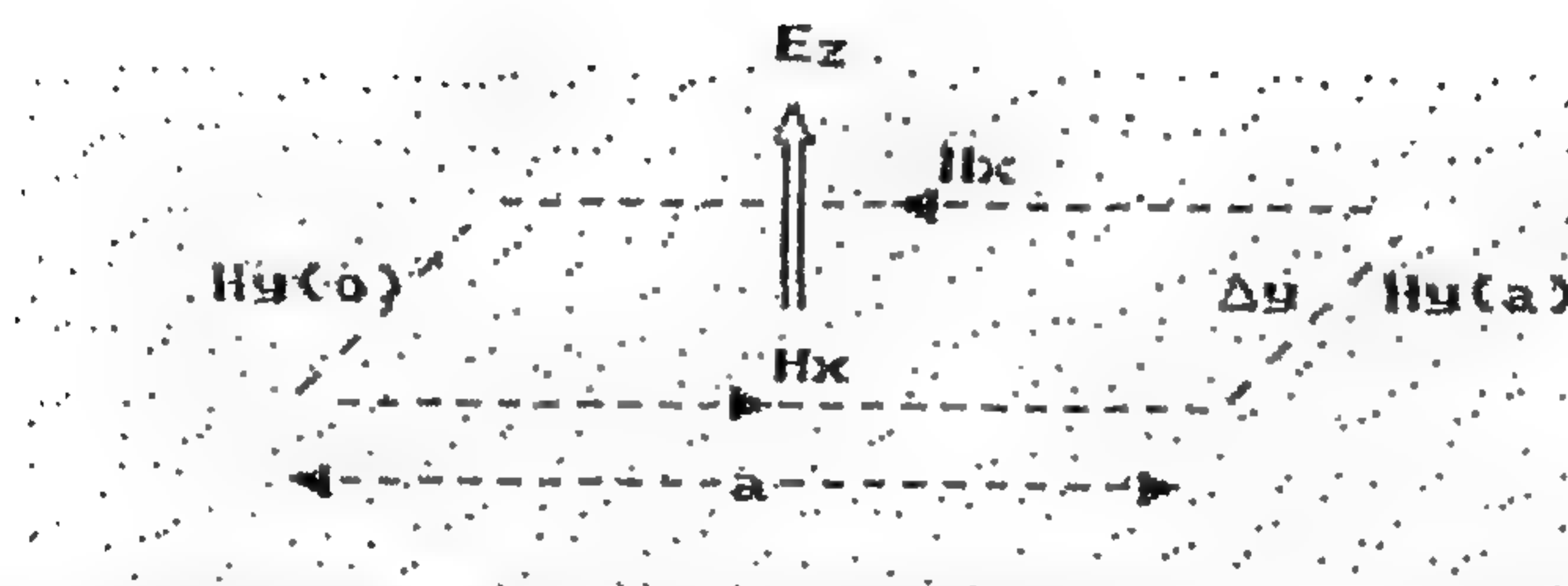
*Velocidad de
propagacion*

**E_z
UHF
INYECCION
VERTICAL**

FRECUENCIA DE CORTE

El siguiente análisis permite determinar los fenómenos reactivos que producen en resonancia el intercambio permanente y sucesivo de la energía electromagnética y por ende la propagación dentro de la guía.

Para ello, consideramos nuevamente la línea de fuerza magnética horizontal alrededor del vástago irradiante y aplicamos la ecuación de Maxwell-Ampere, en forma integral.



Desde que, la corriente de desplazamiento prepondera sobre la corriente de conducción la misma se resume en:

$$20) \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_D$$

$$21) \oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = H_x(y) \times a + H_y(a) \times \Delta y - H_x(y + \Delta y) \times a - H_y(0) \times \Delta y$$

La ecuación 17 nos conduce a expresar:

$$22) H_x(y) \times a - H_x(y + \Delta y) \times a - 2 \times H_y(0) \times \Delta y = I_D$$

$$23) H_x(y) \times a - H_x(y + \Delta y) \times a = 2 \times H_y(0) \times \Delta y + I_D$$

CORRIENTE DE DESPLAZAMIENTO

$$24) I_D = \iint_{\Sigma} J_D \cdot d\Sigma$$

$$25) J_D = \frac{dD}{dt} = J \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_z$$

$$26) d\Sigma = \Delta y \cdot dx$$

Introducimos la ecuación 25, 26 y 8 en la ecuación 24.

$$27) I_D = J \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \Delta y \cdot \int_0^a \frac{U}{b} \cdot \text{Sen}\left(\frac{\pi}{a} x\right) \cdot dx$$

$$28) I_D = \frac{J \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot U \cdot \Delta y}{b \cdot \pi} \cdot \text{Cos}\left(\frac{\pi}{a}\right) = -\frac{J \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot a \cdot 2 \cdot U \cdot \Delta y}{b \cdot \pi}$$

Ahora, reemplazamos en la ecuación 23, las ecuaciones, 18 y 28, dividiendo miembro a miembro por Δy .

$$29) \frac{H_x(y) - H_x(y + \Delta y)}{\Delta y} \cdot a = U \cdot \left(J \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2 \cdot a}{\pi \cdot b} - \frac{1}{J \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot a \cdot b / 2 \cdot \pi} \right)$$

Procedemos a calcular el límite para Δy tendiendo a cero.

$$30) \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{H_x(y) - H_x(y + \Delta y)}{\Delta y} = \frac{dH_x}{dy}$$

$$31) \frac{dH_x}{dy} \times a = \frac{dI}{dy}$$

Por último llegamos a la ecuación circuital:

$$32) \frac{dI}{dI} = U \cdot \left(j \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2 \cdot a}{\pi \cdot b} - \frac{1}{J \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{a \cdot b}{2 \cdot \pi}} \right)$$

Se observa la presencia de una capacidad y una inductancia, ambas distribuidas por unidad de longitud.

$$33) L\left(\frac{\text{Hy}}{\text{m}}\right) = \mu \cdot \mu_0 \frac{a \cdot b}{2 \cdot \pi}$$

$$34) C\left(\frac{\text{Farad}}{\text{m}}\right) = \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \frac{2 \cdot a}{\pi \cdot b}$$

La frecuencia de resonancia entre ambos elementos se obtiene mediante la formula de Thompson:

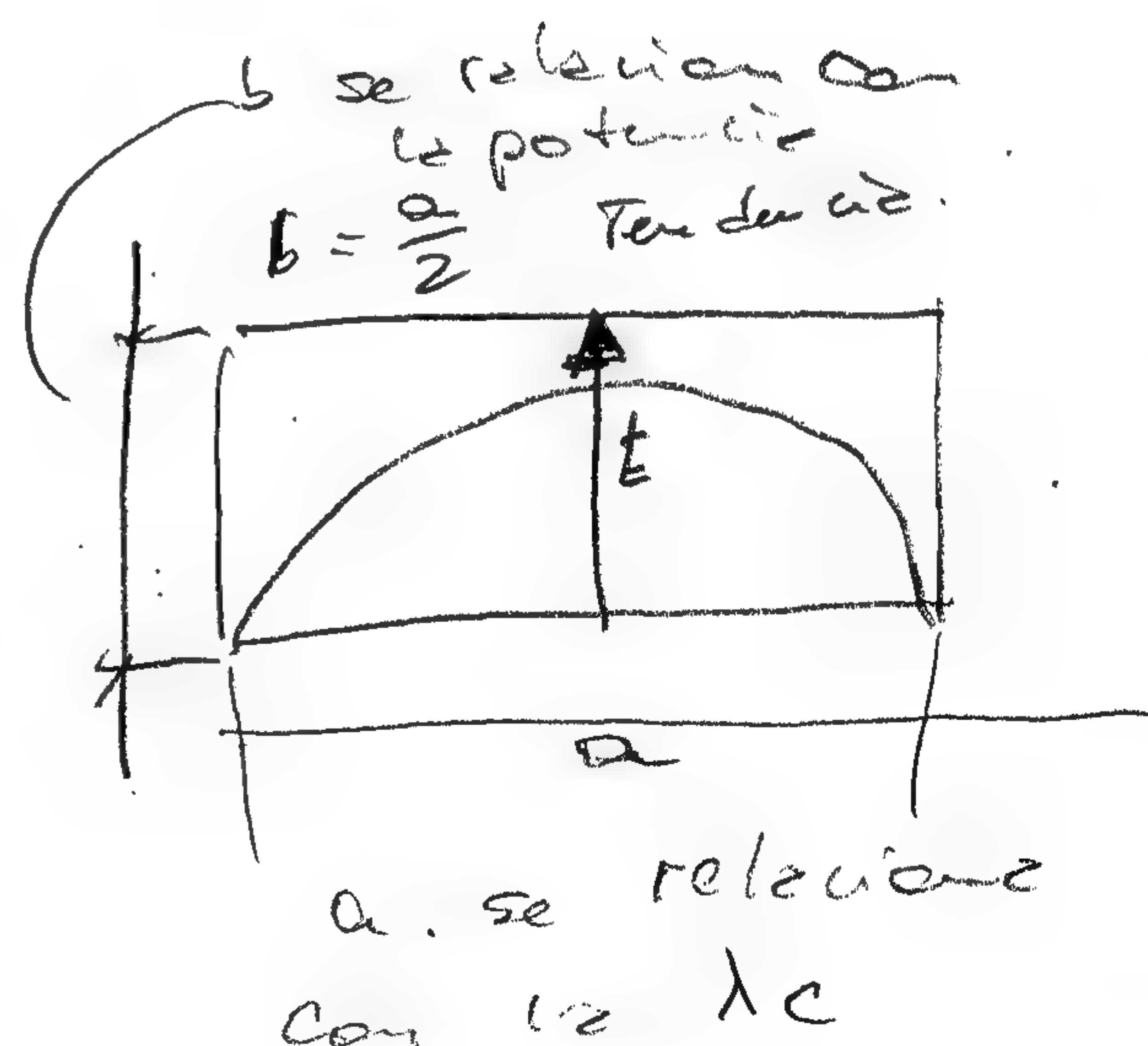
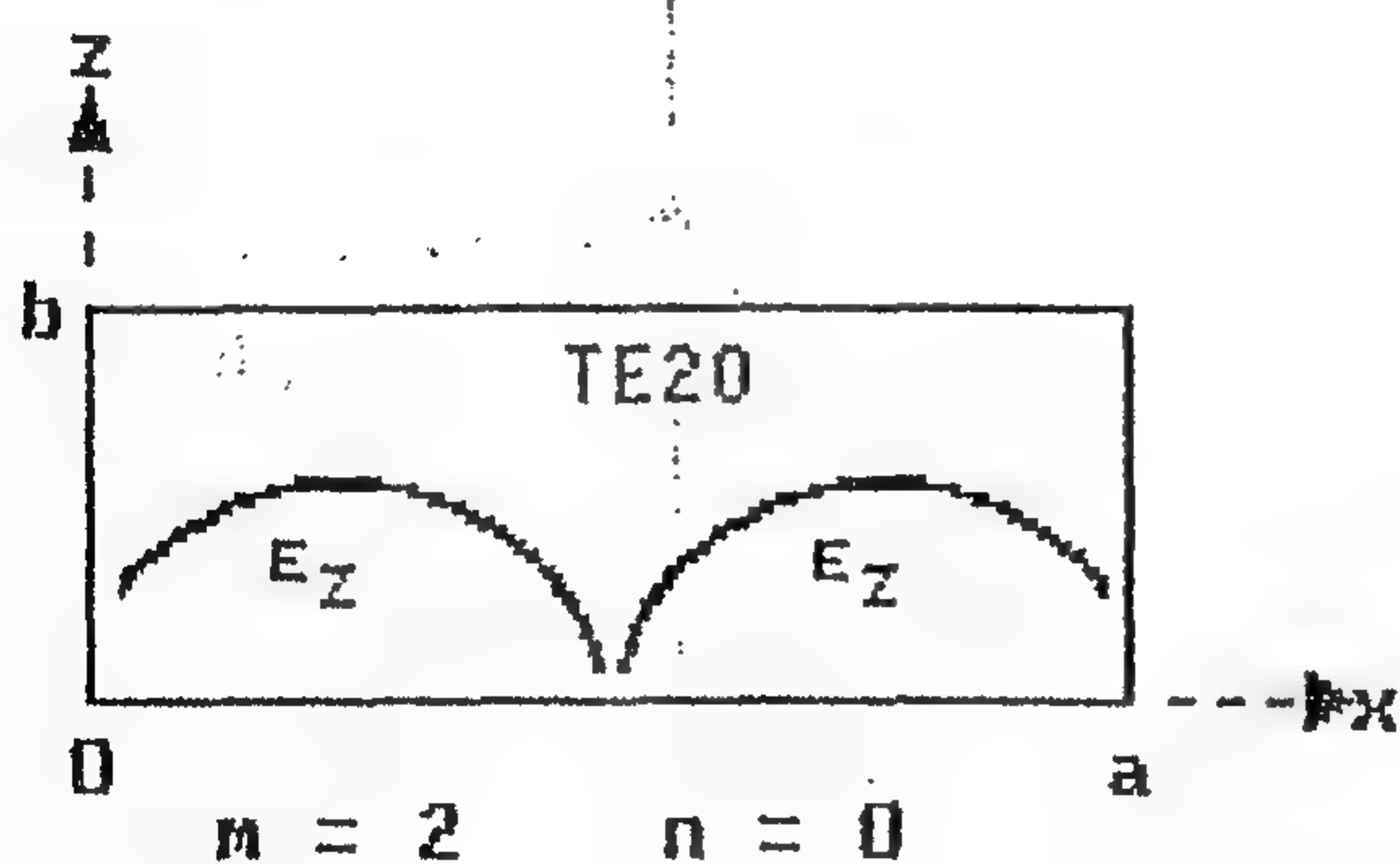
$$35) f_0 = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0 \cdot a \cdot b}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot 2 \cdot a}{\pi \cdot b}}} = \frac{\bar{c} \sqrt{\epsilon \cdot \mu}}{2 \cdot a}$$

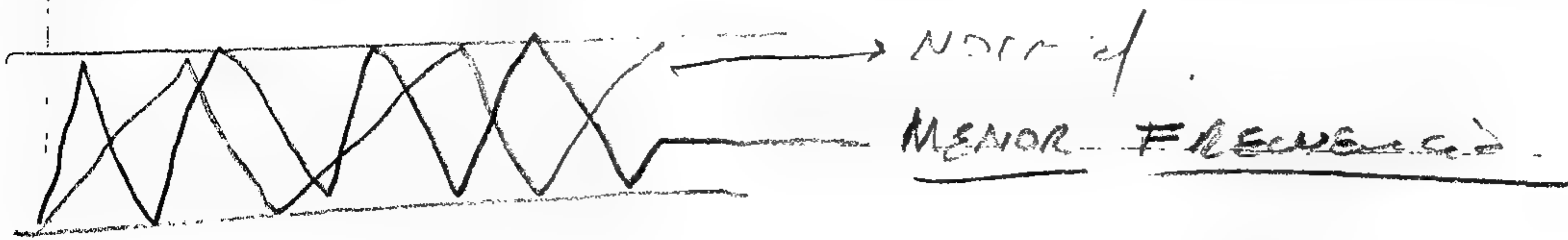
Dicha frecuencia de resonancia es la frecuencia de corte correspondiente al modo de transmisión que nos ocupa.

Se deduce de la última expresión que la longitud de onda de corte se corresponde con:

$$36) \lambda_c = 2 \cdot a$$

Para modos de orden superior es $\lambda_c = \frac{2 \cdot a}{m}$



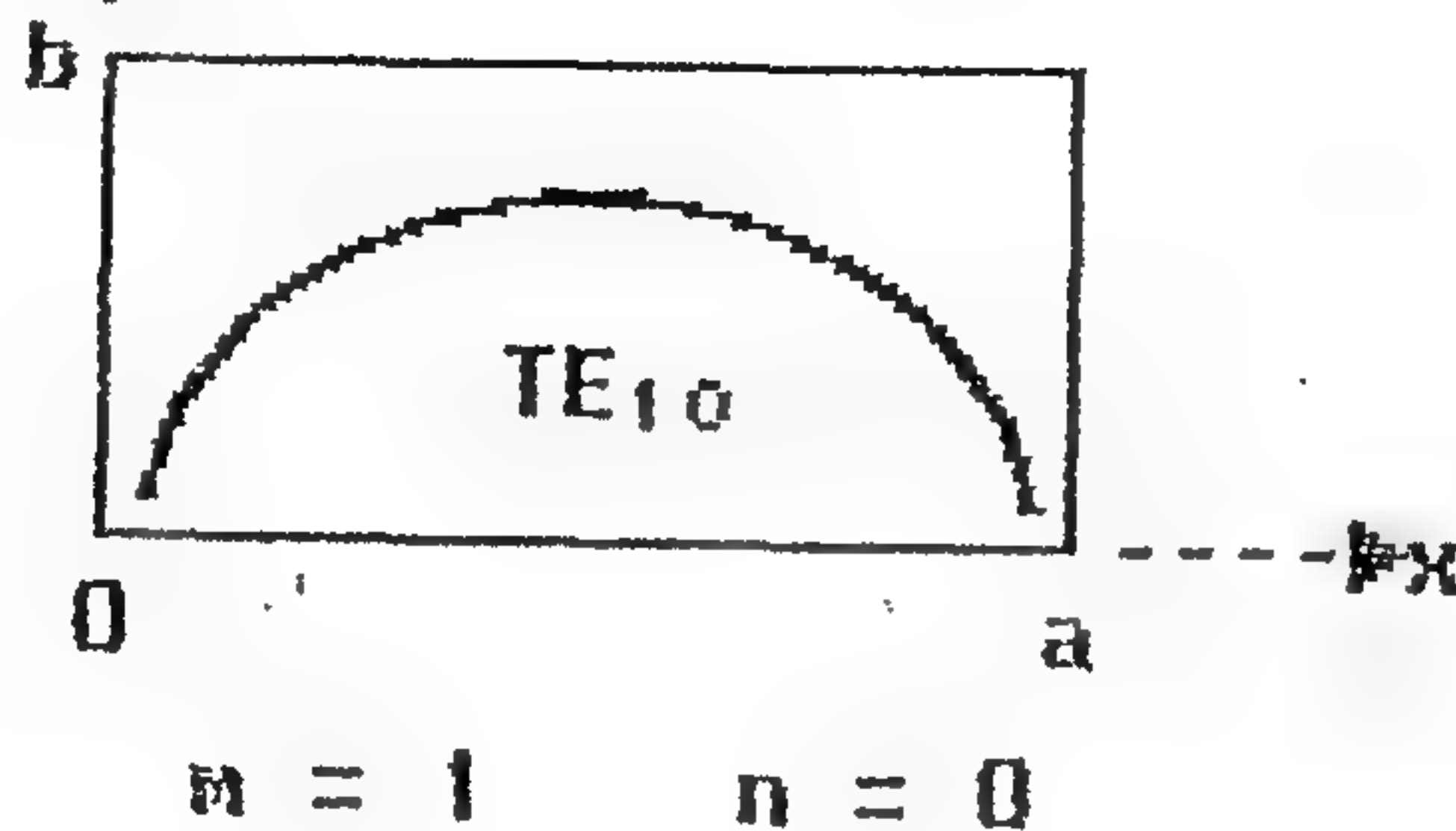


NOIR d
MENOR FRECUENCIA
HADAD EDUARDO

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

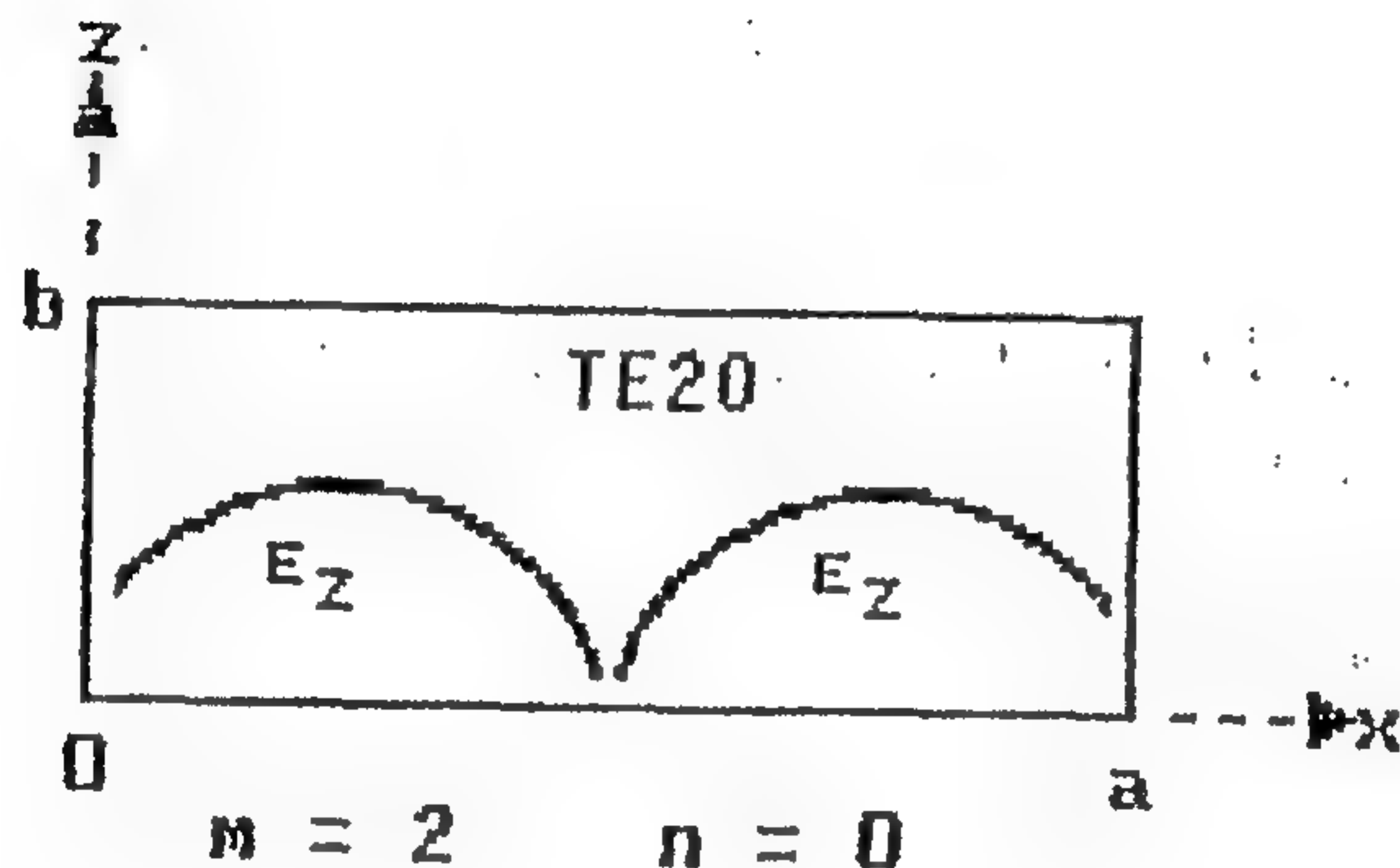
La Guía es un paso Alto

Baja frecuencia



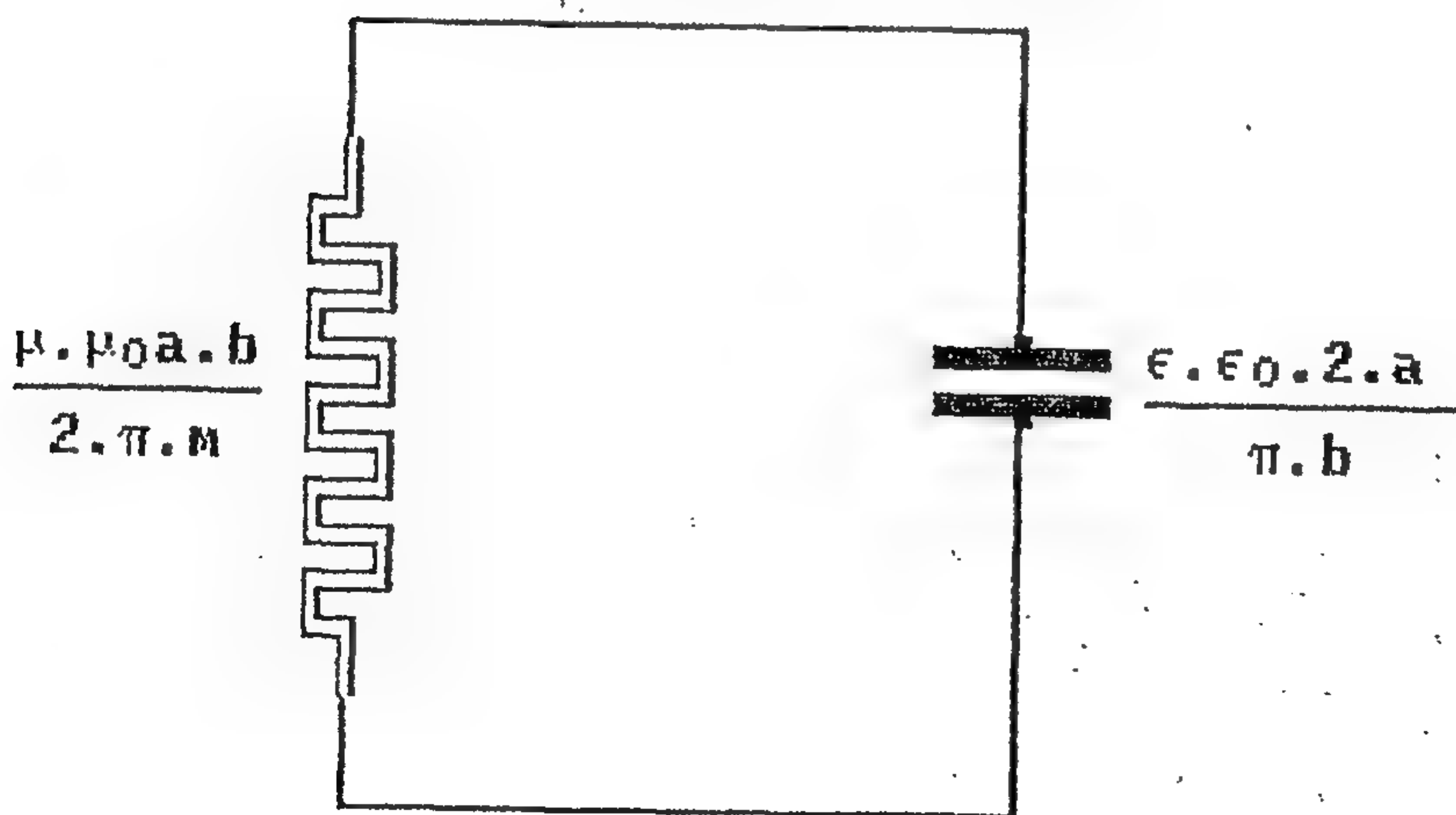
$$\lambda_c = 2a$$

Alta frecuencia



Alta frecuencia

EQUIVALENTE CIRCUITAL



COEFICIENTE DE PROPAGACION

Al igual que en todo tipo de medio de enlace el coeficiente de propagación es un número complejo dado por:

$$37) \quad \gamma = \alpha + j\beta$$

Donde α es la constante de atenuación y β es la constante de fase.

Si el medio que nos ocupa tiene muy bajas pérdidas la atenuación puede considerarse nula. de esa manera el coeficiente de propagación queda representado por :

$$38) \quad \gamma = j\beta$$

CONSTANTES DE FASE

Existen en juego, tres constantes de fase en el proceso de transmisión.

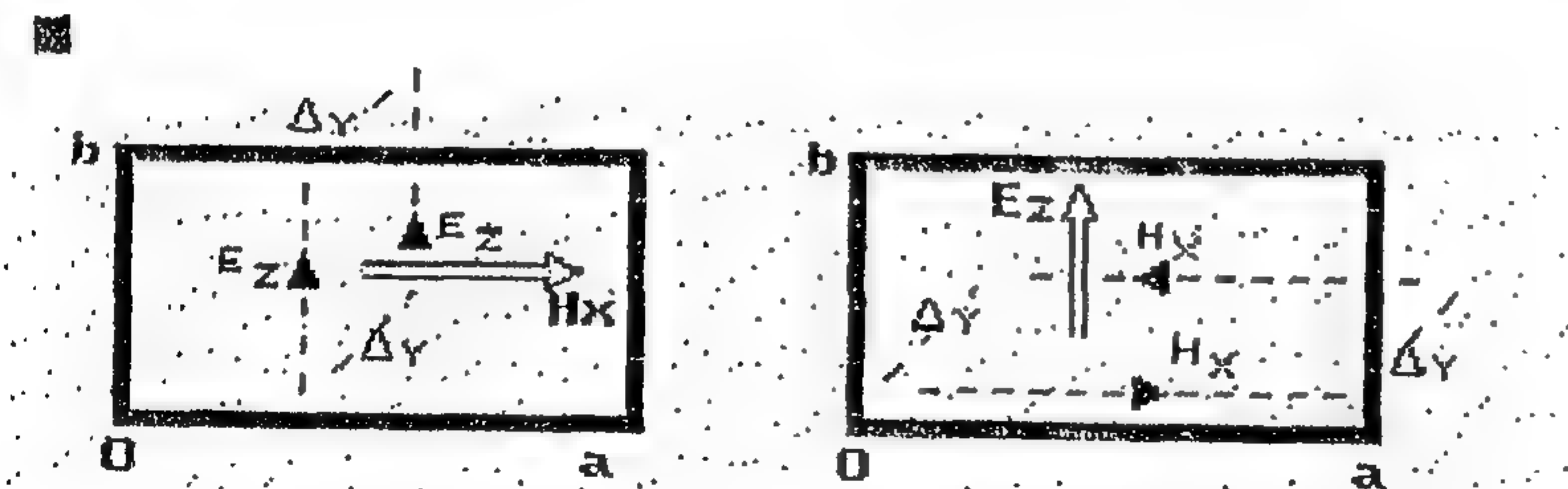
$$38) \quad \beta_0 \rightarrow \text{en el espacio libre}$$

$$39) \quad \beta_g \rightarrow \text{en la guía.}$$

$$40) \quad \beta_c \rightarrow \text{de corte}$$

Para establecer la relación entre las mismas apelamos al siguiente análisis matemático.

Elegimos 2 trayectorias de integración y aplicamos las leyes de Faraday y Ampere, respectivamente.



El procedimiento es el mismo que el utilizado en la ecuación 11.

$$41) \quad \frac{dE_z}{dy} = J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot H_x$$

$$42) \quad \frac{dH_x}{dy} = J \cdot \omega \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_z$$

Procedemos a derivar la ecuación 41.

$$43) \quad \frac{d^2 E_z}{dy^2} = J \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_0 \frac{dH_x}{dy}$$

Reemplazamos la 42 en la 43.

$$44) \quad \frac{d^2 E_z}{dy^2} = -\omega^2 \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_z$$

En el segundo miembro nos hallamos con varios factores que en suma significan la constante de fase en el espacio libre.

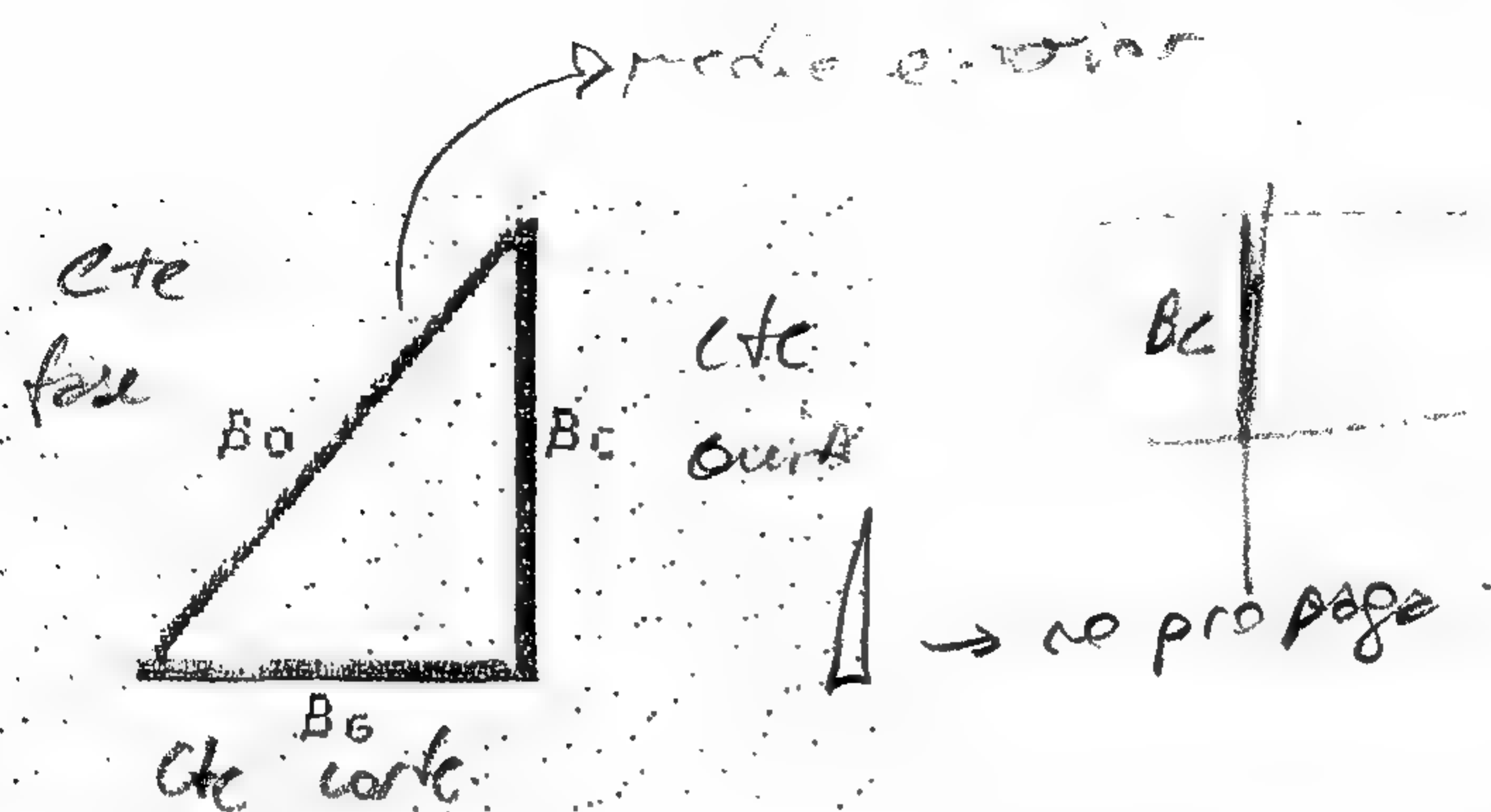
$$45) \quad \omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 = \left(\frac{\omega}{\frac{1}{\sqrt{\mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0}}} \right)^2 = \left(\frac{\omega}{\frac{c}{\sqrt{\mu \cdot \epsilon}}} \right)^2 \approx \epsilon \cdot \beta_0^2$$

Para el vacío absoluto $\epsilon = 1$

$$46) \quad \frac{d^2 E_z}{dy^2} = -\beta_0^2 \cdot E_z$$

Se trata de una ecuación diferencial de 2º orden que responde a todo movimiento armónico. Es la ecuación de las ondas por lo que el primer miembro debe conformar al laplaciano.

$$47) \quad \vec{\nabla}^2 E_z = -\beta_0^2 \cdot E_z$$



LONGITUDES DE ONDA

En el proceso de transmisión intervienen al igual que con las constantes de fase tres longitudes de onda;

56) $\lambda_0 \rightarrow$ en el espacio libre

57) $\lambda_g \rightarrow$ en la guía

58) $\lambda_c \rightarrow$ de corte

Guardan directa relación con las constantes de fase.

59) $\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ *cte fase al vacío*

60) $\beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g}$ *cte longitud de la guía*

61) $\beta_c = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ *cte longitud de corte*

Si reemplazamos en la ecuación 55, tenemos;

62) $\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2}$ *Relación en f.c.u.*

Para nuestro caso debemos agregar la dependencia con la coordenada "x".

$$48) \quad \frac{d^2 E_z}{dx^2} + \frac{d^2 E_z}{dy^2} = -\beta_0^2 \cdot E_z$$

Aplicando las consideraciones formuladas en la ecuación 4 en lo referente al operador diferencial espacial;

$$49) \quad \frac{d^2 E_z}{dx^2} - \beta_G^2 \cdot E_z = -\beta_0^2 \cdot E_z$$

$$50) \quad \frac{d^2 E_z}{dx^2} = -\left(\beta_0^2 - \beta_G^2\right) \cdot E_z$$

RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL

Por cuanto la solución es armónica se adopta una forma general.

$$51) \quad E_z = A \times \cos(\beta_C \cdot x) + B \times \sin(\beta_C \cdot x)$$

Las constantes de integración se determinan mediante aplicación de las condiciones de contorno.

$$52) \quad E_z(0) = 0 = A$$

$$53) \quad E_z = B \times \sin(\beta_C \cdot x)$$

Para determinar la constante β_C , desarrollamos la segunda derivada en la ecuación 53.

$$54) \quad \frac{d^2 E_z}{dy^2} = -\beta_C^2 \cdot E_z$$

Con lo cual, comparando con la ecuación 50, se deduce que:

$$55) \quad \beta_C^2 = \beta_0^2 - \beta_G^2$$

De donde $\Rightarrow \quad \beta_0^2 = \beta_G^2 + \beta_C^2$

LONGITUD DE ONDA DE CORTE

Nos ubicamos sobre la ecuación 53 y aplicamos la condición de contorno en $x=a$.

$$63) \quad E_z(a) = 0 \quad \text{Sen}(\beta_c \cdot a) = 0 \quad \rightarrow \beta_c \cdot a = 0 \rightarrow \pi \rightarrow m \cdot \pi$$

$$64) \quad \beta_c = \frac{m \cdot \pi}{a}$$

Si tenemos en cuenta la existencia de distribución del campo en la pared de la guía, la constante de fase de corte es un vector que en coordenadas rectilíneas se expresa:

$$65) \quad \beta_c = \vec{i} \beta_{c_x} + \vec{j} \cdot \beta_{c_z} \rightarrow \text{cuyo módulo es: } \sqrt{\beta_{c_x}^2 + \beta_{c_z}^2}$$

Donde con el mismo criterio de la Ec.64, $\beta_{c_z} = \frac{n \cdot \pi}{b}$

Por lo tanto la constante de fase de corte en la guía rectangular es;

$$66) \quad \beta_{c_{mn}} = \sqrt{\left(\frac{m \cdot \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n \cdot \pi}{b}\right)^2}$$

Luego, la Ec. 66 nos lleva mediante $\lambda_{c_{mn}} = \frac{2 \cdot \pi}{\beta_{c_{mn}}}$ a la siguiente fórmula de uso práctico en la solución de problemas.

$$67) \quad \lambda_{c_{mn}} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}$$

La misma permite establecer una fórmula general para la determinación de las respectivas frecuencias de corte en función de "m" y "n".

$$68) \quad f_{c_{mn}} = \frac{\bar{c}}{\lambda_{c_{10}}} \sqrt{m^2 + \left(\frac{n \cdot a}{b}\right)^2}$$

Con ella puede elaborarse una tabla que nos ayuda a proyectar las guías de onda rectangulares que cumplan determinadas condiciones.

Para ello adoptamos la siguiente relación para las dimensiones de la guía rectangular:

69) $a = 2.b \rightarrow \frac{a}{b} = 2$

De ese modo, la fórmula se transforma en:

70) $f_{c_{mn}} = \frac{c}{\lambda_{10}} \cdot \sqrt{m^2 + 4.n^2}$

Los números "m" y "n" son enteros por lo que ello nos conduce a;

Normalizamos la última expresión respecto de la frecuencia de corte del modo dominante TE₁₀. es decir la menor frecuencia de corte.

Nº	m	n :	$\sqrt{m^2 + 4.n^2}$
1º	1	0	1
2º	2	0	2
3º	0	1	2
4º	1	1	2.23
5º	2	1	2.828
6º	3	0	3
7º	3	1	3.6
8º	4	0	4
9º	4	1	4.472
10º	2	2	4.472
11º	3	2	5
12º	4	2	5.656
13º	0	3	6
14º	1	3	6.082
15º	2	3	6.324
16º	3	3	6.7
17º	4	3	7.211
18º	0	4	8
19º	1	4	8.062
20º	2	4	8.246
21º	3	4	8.54
22º	4	4	8.944
23º	5	1	5.385
24º	5	2	6.4

LONGITUD DE ONDA EN LA GUIA

El análisis y desarrollo precedente, nos permite determinar la condición fundamental para la propagación de la onda electromagnética en toda guía de onda, sea, rectangular ó cilíndrica.

De la ecuación general N° 62, extraemos la expresión matemática de la longitud de onda en la guía.

71) $\lambda_g = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}}$

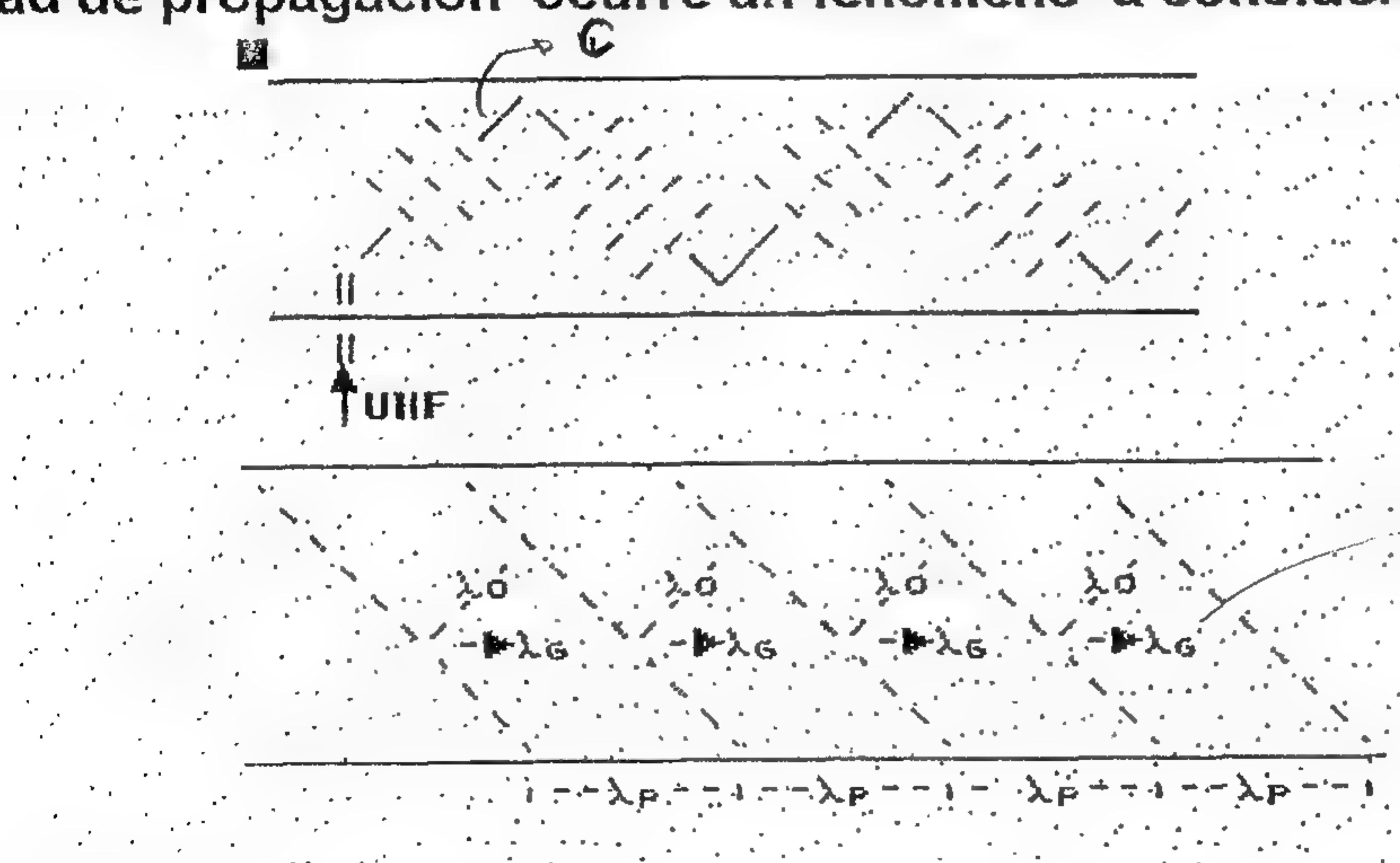
Handwritten notes: $\lambda_c = \frac{c}{f}$ (circled), λ_0 (circled), λ_g (circled). Arrows point from λ_c to $\frac{c}{f}$ and from λ_0 to $2a$. A note "positivo para que haya propagación" points to the denominator.

Observando dicha expresión surge de inmediato la "condición de propagación". El radicando debe ser positivo para que λ_0 sea un número real y por ende haya propagación. En su defecto, la guía se comporta cual un atenuador.

72) $\lambda_0 < \lambda_c$

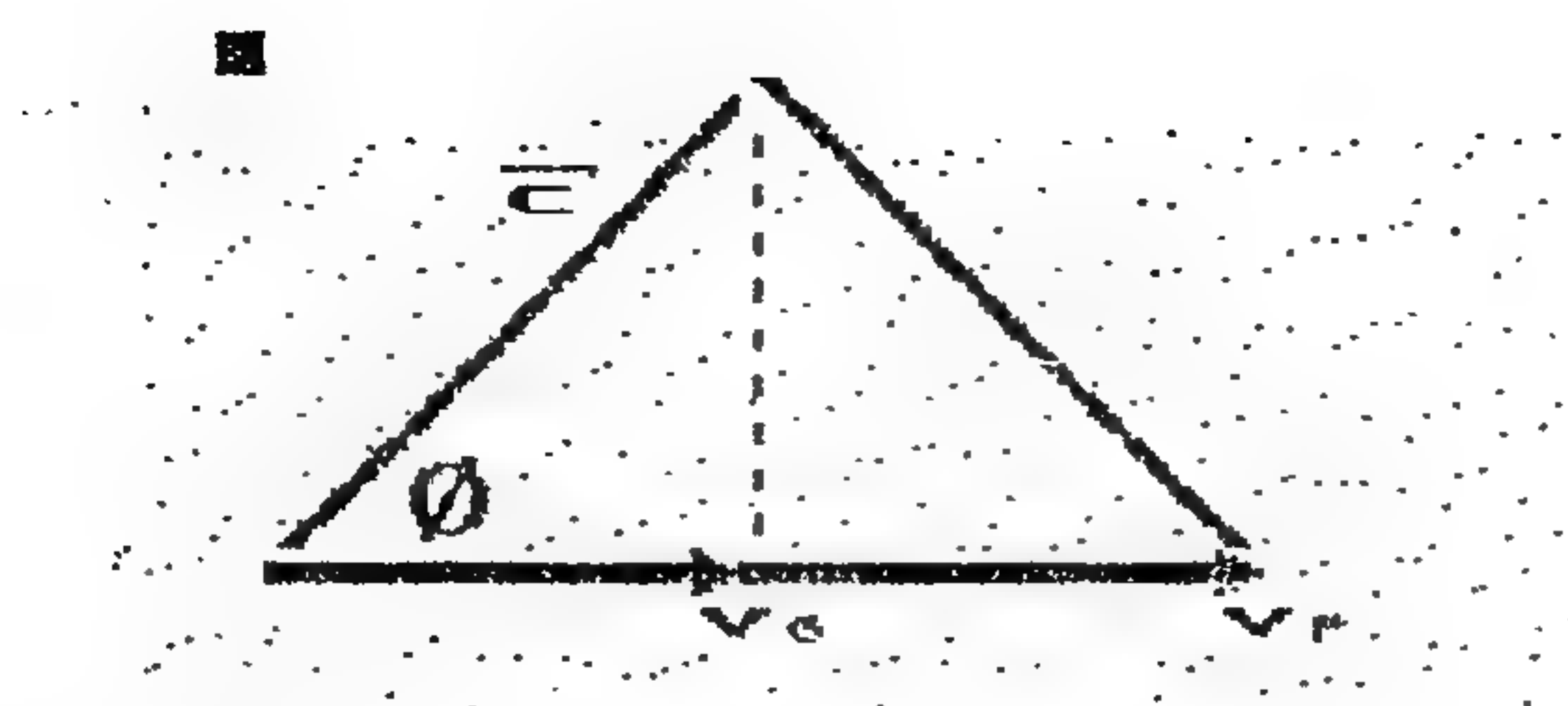
VELOCIDAD DE LA PROPAGACION

Así como la expresión dada por la ecuación 71, nos hace ver, que la longitud de onda en la guía resulta ser mayor que la del espacio libre, con la velocidad de propagación ocurre un fenómeno a considerar.



Handwritten note: velocidad de grupo

La velocidad de grupo es la proyección de la velocidad de la luz sobre la dirección de propagación.



$$73) \quad v_G = \vec{c} \times \cos \theta$$

La velocidad de la luz, es la proyección de la velocidad de fase.

$$74) \quad \vec{c} = v_P \times \cos \theta$$

Consecuentemente resulta la media geométrica de las dos velocidades, de grupo y de fase.

$$75) \quad \boxed{\vec{c} = \sqrt{v_G \cdot v_P}}$$

Velocidad de Fase

→ puede ser más rápida

La velocidad de fase conlleva un concepto fasorial. Se obtiene teniendo en cuenta 2 puntos del recorrido de la propagación de la onda electromagnética, que tengan igual fase.

$$76) \quad \omega \cdot t - \beta_G \cdot y = k$$

$$77) \quad \omega \cdot dt - \beta_G \cdot dy = 0$$

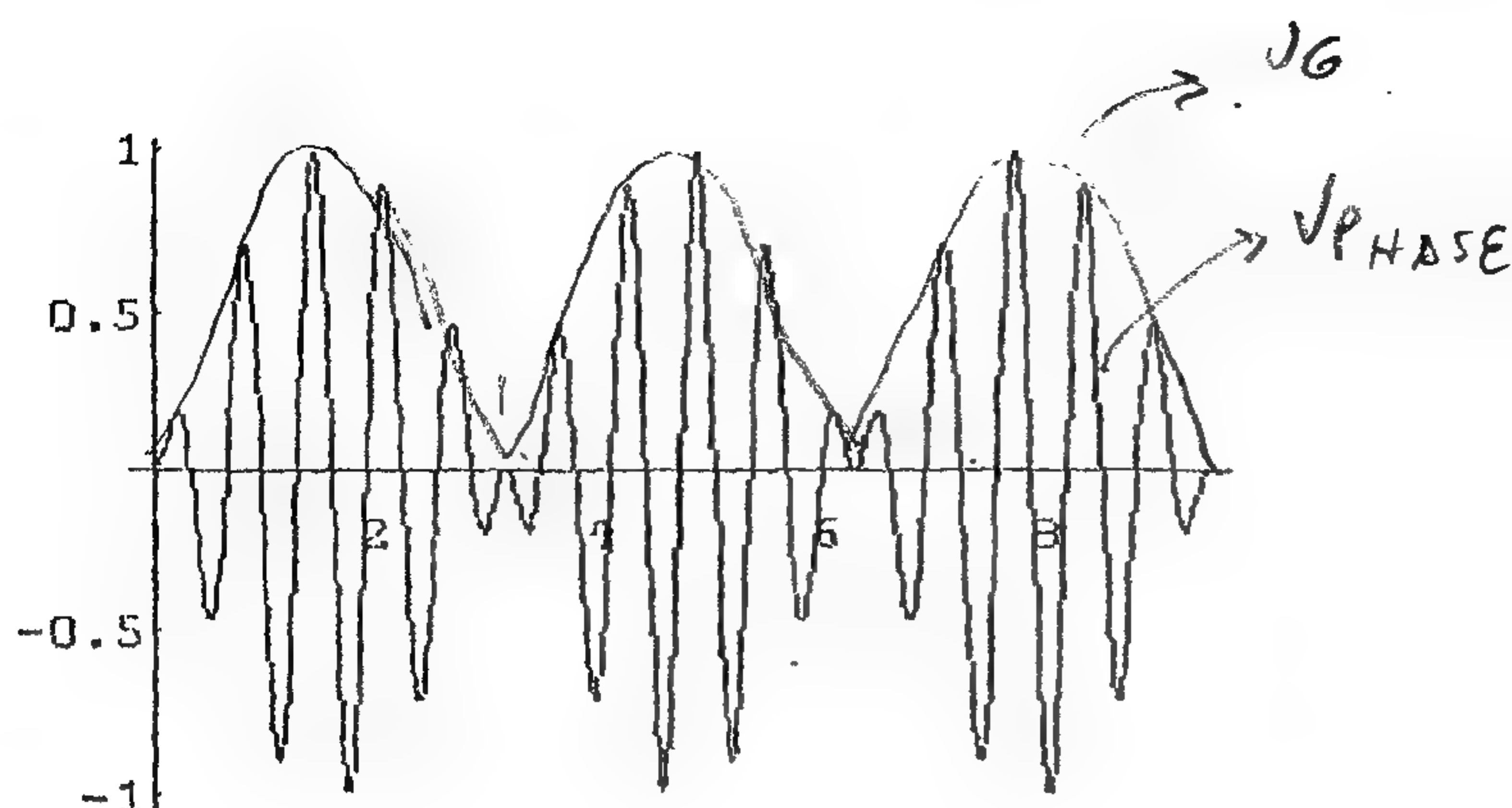
$$78) \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\omega}{\beta_G} = v_P$$

$$79) \quad v_P = \frac{\omega}{\beta_G} = \frac{2 \cdot \pi \cdot f_0}{\frac{2 \cdot \pi}{\lambda_G}} = \frac{\vec{c}}{\lambda_0} \cdot \lambda_G = \vec{c} \cdot \frac{\lambda_G}{\lambda_0}$$

Si la velocidad de ^{grupo} fase es mayor que la velocidad de la luz, entonces:

$$80) \quad \lambda_G > \lambda_0 \quad \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \quad \lambda_0 < \lambda_G < \lambda_c$$

VELOCIDAD DE GRUPO



La figura pretende mostrar la existencia de dos funciones ondulantes. Una de alta frecuencia y otra envolvente de la primera de frecuencia menor.

La de alta frecuencia representa la velocidad de fase, producto de una longitud de onda aparente (λ_p) puesta de manifiesto en los lados de la guía.

La de baja frecuencia, envolvente, representa la velocidad de grupo, producto de la variación de la frecuencia, respecto de la variación de la constante de fase (β_g).

En términos matemáticos:

$$81) (\omega + \Delta\omega).t - (\beta_g + \Delta\beta_g).y = k$$

$$82) (\omega - \Delta\omega).t - (\beta_g - \Delta\beta_g).y = k$$

Restando miembro a miembro;

$$83) 2.\Delta\omega.t = 2.\beta_g.y$$

$$84) \frac{y}{t} = v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta\beta_g}$$

En el límite tendremos:

$$85) \quad v_g = \frac{d\omega}{d\beta_o}$$

Apelando a la ecuación 55, Pagina 13, ; $\beta_o^2 = \beta_o^2 + \beta_c^2$

Teniendo en cuenta que: $\beta_o^2 = \omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_o \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o$

Reemplazamos en la anterior:

$$86) \quad \omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_o \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o = \beta_o^2 + \beta_c^2$$

$$87) \quad 2 \cdot \omega \cdot \mu \cdot \mu_o \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o = 2 \cdot \beta_o \cdot \frac{d\beta_o}{d\omega}$$

$$88) \quad \frac{d\omega}{d\beta_o} = \frac{\beta_o}{\omega \cdot \mu \cdot \mu_o \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o} = \frac{\omega \cdot \beta_o}{\omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_o \cdot \epsilon \cdot \epsilon_o} = \frac{\omega \cdot \beta_o}{\beta_o^2}$$

La última expresión la podemos escribir de la siguiente manera.

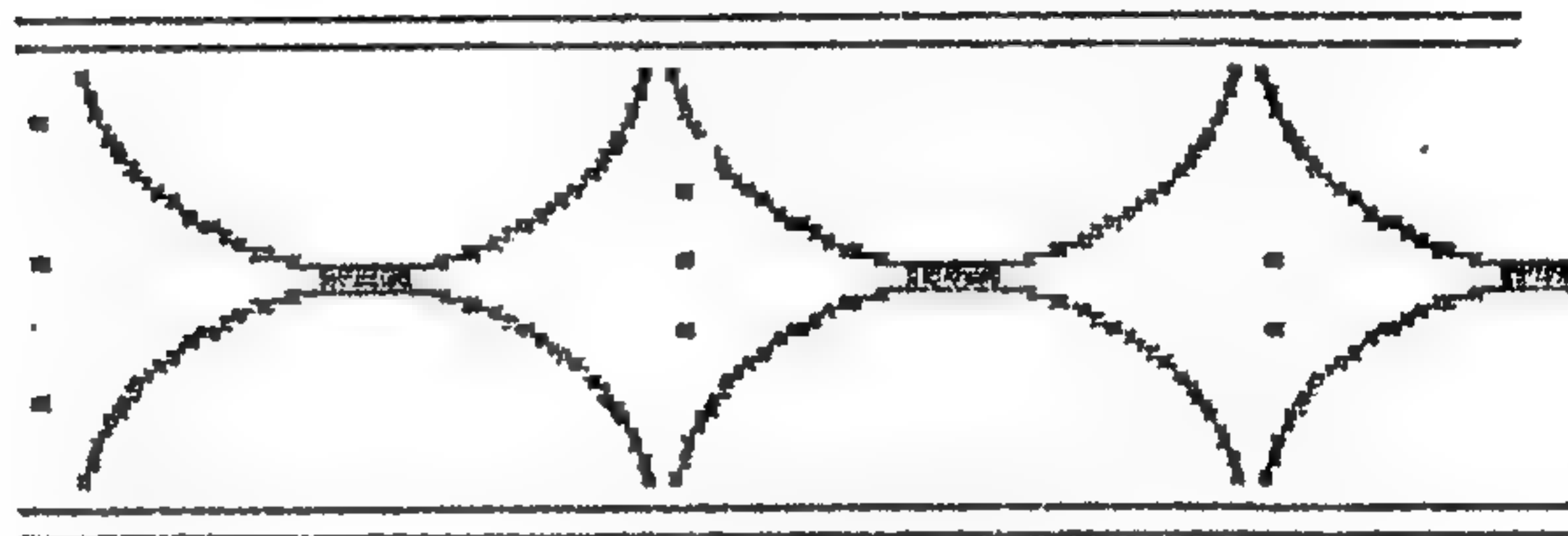
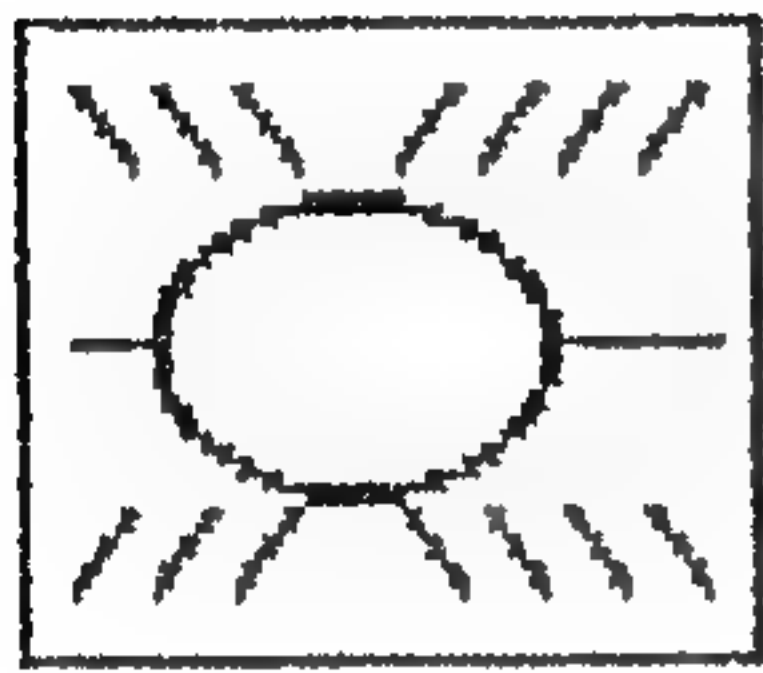
$$89) \quad v_g = \frac{\omega \cdot \beta_o}{\beta_o \cdot \beta_o} = \frac{\omega}{\beta_o} \cdot \frac{\beta_o}{\beta_o} = \vec{c} \cdot \frac{\lambda_o}{\lambda_g}$$

Se aprecia que la longitud de onda del espacio libre es menor que la longitud de onda en la guía. Todo ello en concordancia con que la velocidad de grupo transporta la energía y por lo tanto es menor que la velocidad de la luz.

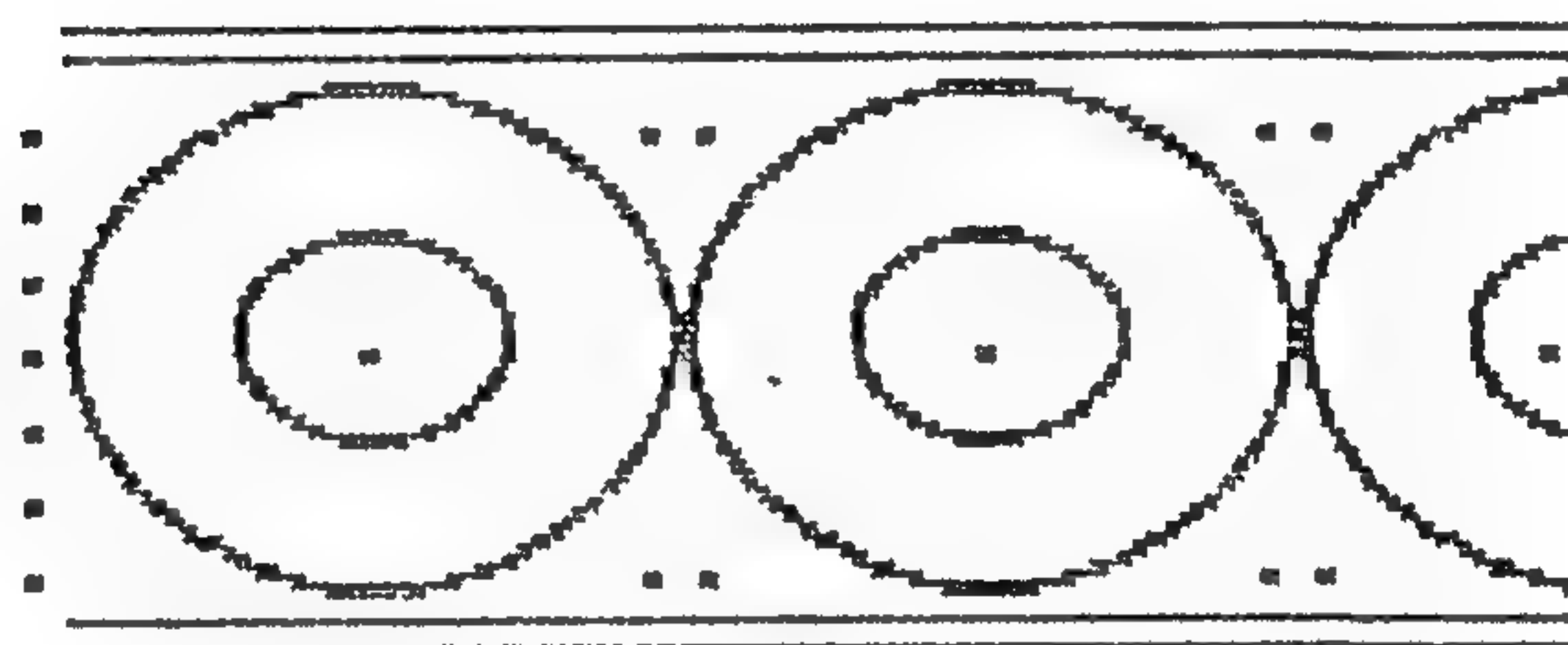
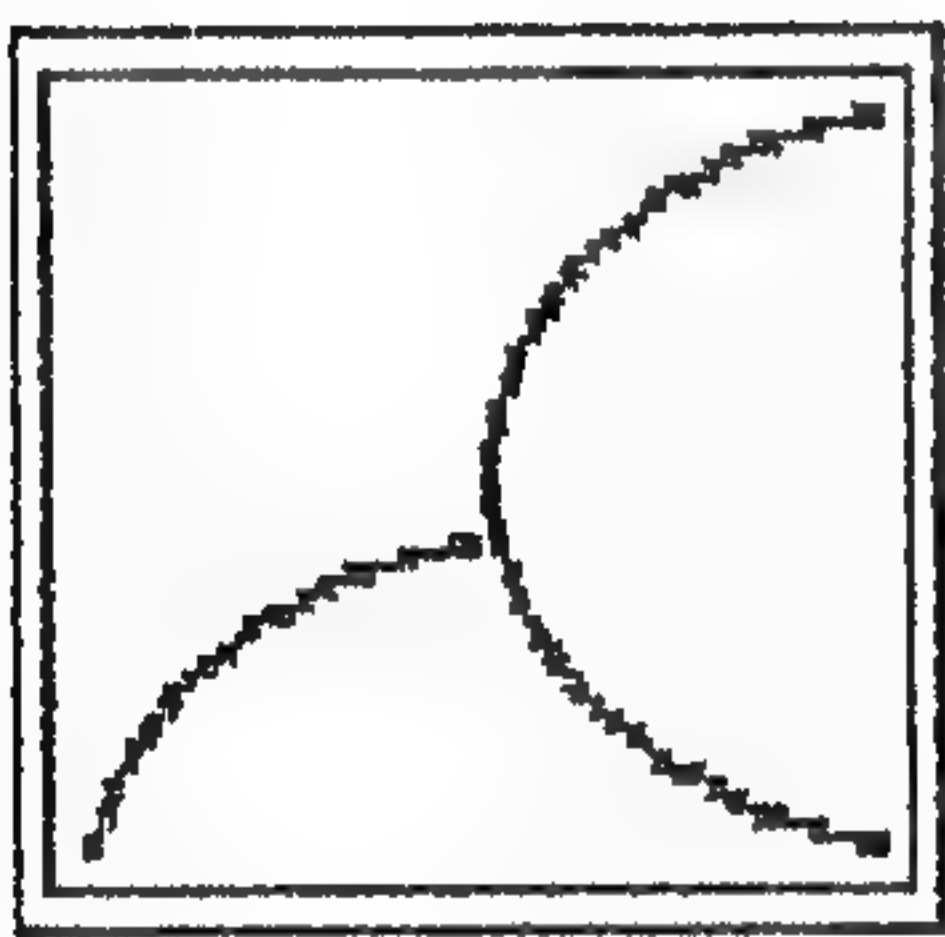
Si multiplicamos miembro a miembro las ecuaciones 79 y 89, tenemos:

$$90) \quad v_g \times v_p = \vec{c}^2 \quad \text{coherente con la ecuación 75}$$

Los coeficiente m y n , pueden tomar cualquier valor entero. Para una onda TE, pueden anularse cualquiera de los dos, pero si se anulan ambos la onda desaparece. La onda TM, se anula si es cero uno de los 2.

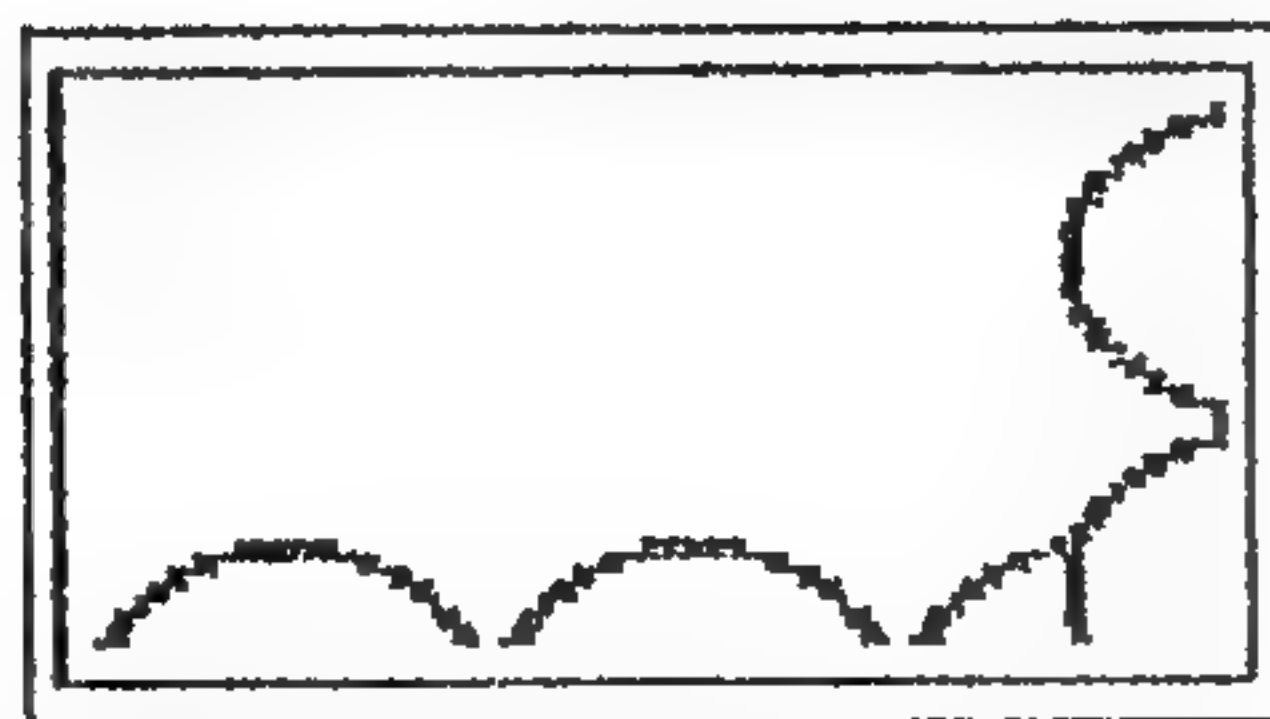


MODO TM_{11}



MODO TE_{11}

Cada uno de los subíndices significa la cantidad de semiciclos del campo eléctrico a lo largo de los ejes.



MODO TE_{32}

6/92

TABLA 16

EJERCICIO RESUELTO

Se tiene una guía rectangular de las siguientes dimensiones:

$$a=7.214\text{cm} \quad b=3.404\text{cm}$$

Se exitan los modos TE_{10} , TE_{01} , y TE_{02} a la frecuencia de operacion de 5 Gigahertz.

Investigar cada caso.

1er Caso; $m=1 \quad n=0$

$$\lambda_0 = 6\text{cm} \quad \lambda_{c10} = 2.a = 2 \times 7.214 = 14.428\text{cm}$$

Propaga

$$\lambda_0 < \lambda_c$$

$\rho_c = \rho = 0$

$$\text{Ecuacion 70} \quad \lambda_g = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}} = \frac{6 \times 14.428}{\sqrt{14.428^2 - 6^2}} = 6.6\text{cm}$$

$$v_p = \vec{c} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_g} = \vec{c} \cdot \frac{6.6}{6} = 330.000\text{Km/s}$$

2do Caso; $m=0 \quad n=1$

$$\lambda_{c01} = 2.b = 2 \times 3.404 = 6.808\text{cm}$$

$$\lambda_0 < \lambda_{c01}$$

Propaga

$$\lambda_g = \frac{6 \times 6.808}{\sqrt{6.808^2 - 6^2}} = 12.69\text{cm}$$

$$v_p = \vec{c} \cdot \frac{12.69}{6} = 636.000\text{Km/s}$$

Ultimo Caso $m=0 \quad n=2$

$$\lambda_{g02} = \frac{2.a.b}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}} = \frac{2 \times 6 \times 3.404}{\sqrt{4 \times 7.214^2}} = 2.83\text{cm}$$

no propaga \Rightarrow atenua β_g

$$\beta_g = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2} = 2.\pi \sqrt{\left(\frac{1}{36}\right) - \left(\frac{1}{8}\right)} = 1.1958$$

$$\alpha = 1.958\text{Neper}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

2º.--Una guía rectangular con dimensiones $a > b$, debe operar entre las frecuencias, 8 a 12 Gigahertz. Se pide conocer entre qué valores puede variar "a", para que entre dichas frecuencias, transmita sólo el modo TE10?

SOLUCION

1º.- 8 gigahertz se corresponde con 3.75 cm

2º.- 12 gigahertz se corresponde con 2.5 cm

Es decir: $2.5 \text{ cm} < \lambda_0 < 3.75 \text{ cm}$

La longitud de onda de corte TE10 es $2.a$

Para que propague se debe cumplir que: $\lambda_0 < \lambda_{c10} = 2.a$

La frecuencia de corte inmediata superior es la correspondiente al modo TE20 es decir:

$\lambda_{c20} = a$ Para que no propague se debe cumplir: $\lambda_0 > \lambda_{c20} = a$

O sea:

$$a < 2.5 \text{ cm} < \lambda_0 < 3.75 \text{ cm} < 2.a$$

De donde surge que: $a > \lambda_0 / 2 = \frac{3.75}{2} = 1.875 \text{ cm}$

Por último:

$$1.875 < a < 2.5 \text{ cm}$$

6/102

3º.-La guía rectangular normalizada RG97U. cuenta con las siguientes dimensiones. $a = .568 \text{ cm}$ y $b = 0.284 \text{ cm}$. ¿Cual es el margen de frecuencia utilizable si sólo quiere propagarse el modo TE10.?

SOLUCION

$$1.- \lambda_{c10} = 2 \times a = 1.136 \text{ cm}$$

$$\lambda_{c20} = a = .568 \text{ cm}$$

$$2^{\circ}. .568 \text{ cm} < \lambda_0 < 1.136 \text{ cm}$$

$$3^{\circ}. \frac{\bar{c}}{.568} = 52.81 \text{ Gigahertz} > f_0 > \frac{\bar{c}}{1.136} = 26,40 \text{ Gigahertz}$$

9/12

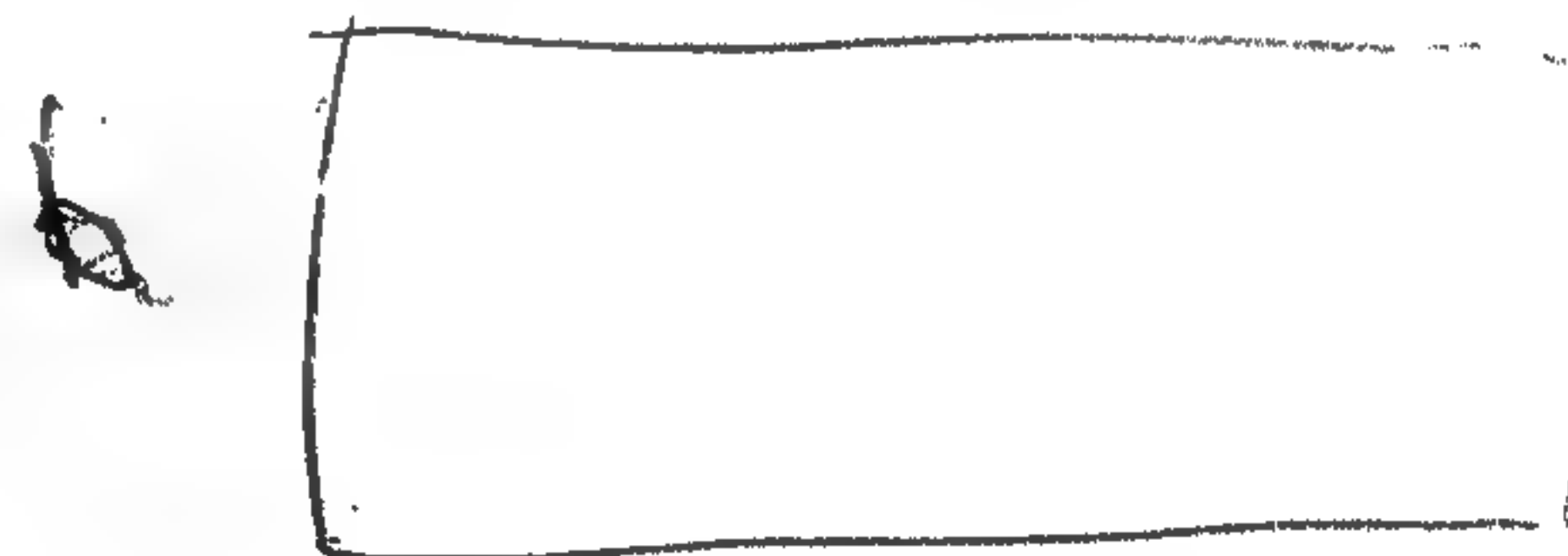
4°.-Una guía rectangular, opera entre 12.4 y 18.8 gigahertz en el modo dominante con una frecuencia de corte de 9.49 gigahertz y cuenta con la siguiente relación; $a/b=2$. ¿ Cuales son las dimensiones ?.

T_{10}

SOLUCION

$$1^{\circ} \lambda_{c10} = \frac{\bar{c}}{9.49 \times 10^9} = \frac{3 \times 10^{10}}{9.49 \times 10^9} = 3.16 \text{ cm} = 2.a \Rightarrow a = \frac{3.16}{2} = 1.58 \text{ cm}$$

$$2^{\circ} b = \frac{a}{2} = \frac{1.58}{2} = 0.79 \text{ cm}$$



$$\lambda_c = T_{10} = 2a$$

$$\lambda_c = T_{20} = a$$

9/11

Rep

T₁₀

1.5.-Una guía rectangular, opera en el modo dominante con una frecuencia de corte de 0.908gigahertz y cuenta con la siguiente relación; $a/b=2$. Si la longitud de onda medida en la guía es de 40cm, encontrar la frecuencia de operación, las dimensiones de la guía y la constante de fase en la guía.

SOLUCION

$$1^\circ. \lambda_{c10} = \frac{\bar{c}}{0.908 \times 10^9} = 33.03 \text{ cm} = 2 \times a \Rightarrow a = \frac{33.03}{2} = 16.515$$

$$2^\circ. b = \frac{16.515}{2} = 8.257 \text{ cm}$$

$$3^\circ. \lambda_0 = \frac{\lambda_c \cdot \lambda_g}{\sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_g^2}} = \frac{33.03 \times 40}{\sqrt{33.03^2 + 40^2}} = 25.47 \text{ cm} \Rightarrow f_0 = \frac{\bar{c}}{25.47} = 1.18 \text{ Ghz}$$

$$4^\circ. \beta_g = \frac{2\pi}{\lambda_g} = \frac{6.28}{40} = .157 \text{ rad/cm}$$

↳ cte de propagación

$$\lambda_g = 40 \text{ cm}$$

1.6.-Una guía de onda rectangular con dieléctrico de aire tiene las dimensiones $a=7.214\text{cm}$ y $b=3.404\text{cm}$. Para el modo de operación TM11, la frecuencia de operación es 1.1 veces la frecuencia de corte; Calcular; a).- Constante de Fase de Corte. b).-Frecuencia de Corte. c).-Frecuencia de Operación. d).-Constante de Fase en la Guía. e).-Longitud de Onda de Corte. f).-Longitud de Onda de Operación. g).-Longitud de Onda en la Guía. h).- Velocidad de Fase.

SOLUCION

$$a). - \beta_{c11} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{7.214}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{3.404}\right)^2} = 1.0205 \text{ rad / cm}$$

$$b). - e). - \lambda_{c11} = (2.\pi / \beta_{c11}) = 6.153 \text{ cm} \Rightarrow f_{c11} = \frac{\vec{c}}{\lambda_{c11}} = 4.87 \text{ Ghtz}$$

$$c). - f_0 = 1.1 \times f_{c11} = 1.1 \times 4.87 \text{ Ghtz} = 5.36 \text{ Ghtz}$$

$$f). - \lambda_0 = \frac{\vec{c}}{f_0} = 5.60 \text{ cm}$$

$$g). - \lambda_G = \frac{\lambda_0 \times \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}} = \frac{5.60 \times 6.153}{\sqrt{6.153^2 - 5.60^2}} = 13.51 \text{ cm}$$

$$d). - \beta_G = \frac{2.\pi}{13.51} = 0.465 \text{ rad / cm}$$

$$h). - v_p = \vec{c} \times \frac{\lambda_G}{\lambda_0} = \vec{c} \times \frac{13.51}{5.60} = \vec{c} \times 2.4125 = 7.23 \times 10^8 \text{ m / s}$$

1.7.-Determinar las condiciones bajo las cuales puede existir en el espacio libre un campo magnético dado por:

$$H_y(x, y, z, t) = K \cdot \cos(87.3 \cdot x) \cdot \cos(92.4 \cdot z) \cdot \cos(\omega \cdot t - 109.1 \cdot y)$$

SOLUCION

$$1^\circ. \quad \lambda_G = \frac{2\pi}{\beta_G} = \frac{2\pi}{109.1} = 5.75 \text{ cm}$$

$$2^\circ. \quad \beta_C = \sqrt{(87.3)^2 + (92.4)^2} = 127.1 \text{ rad / cm}$$

$$3^\circ. \quad \lambda_C = \frac{2\pi}{\beta_C} = \frac{2\pi}{127.11} = 4.94 \text{ cm}$$

$$4^\circ. \quad \lambda_0 = \frac{5.75 \times 4.94}{\sqrt{(4.94)^2 + (5.75)^2}} = 3.74 \text{ cm}$$

$$5^\circ. \quad f_0 = 8 \text{ gigahertz}$$

1.8. Obtener la constante de fase de corte para una señal de 4 gigahertz en un medio cuya constante dieléctrica tiene un valor de 2.2 si la constante de fase en la guía es de 54 °/cm

SOLUCION

$$1^\circ \quad \beta_g = \frac{54^\circ \times \pi}{180^\circ} = 0.942 \text{ rad / cm} \quad \lambda_G = 6.66 \text{ cm}$$

$$2^\circ \quad \lambda_0 = \frac{\bar{c}}{f_0} = \frac{\bar{c} / \sqrt{\epsilon}}{4 \text{ gigahertz}} = \frac{\bar{c} / \sqrt{2.2}}{4 \times 10^9} = 5 \text{ cm}$$

$$3^\circ. \quad \lambda_C = \frac{6.66 \times 5}{\sqrt{6.66^2 - 5^2}} = 7.56 \text{ cm} \quad \beta_C = \frac{2\pi}{\lambda_C} = \frac{2\pi}{7.56} = 0.83 \text{ rad / cm}$$

1.9.-Si la componente magnética dada en el problema 1.7. representa un campo longitudinal de una onda TE₂₁ en una guía rectangular, encontrar:
a).-Dimensiones de la Guía. b).-Constante de fase de corte. c).-Longitud de Onda en la Guía.

SOLUCION

$$1^\circ \quad 87.3 = \frac{m \cdot \pi}{a} = \frac{2 \cdot \pi}{a}$$

$$a = 7.2 \text{ cm}$$

$$2^\circ \quad 92.4 = \frac{n \cdot \pi}{b} = \frac{2 \cdot \pi}{b}$$

$$b = 3.39 \text{ cm}$$

$$3^\circ \quad \beta_c = 127.1 \text{ rad / cm}$$

$$\lambda_c = 4.94 \text{ cm}$$

$$4^\circ \quad \lambda_g = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 - \lambda_0^2}} = 5.72 \text{ cm}$$

6/12
1.10-Una guía de onda rectangular, que opera en 5Gigahertz, tiene las dimensiones, $a = 2,29 \text{ cm}$, $b = 1,02 \text{ cm}$ Si sólo se quiere propagar el modo dominante, no se verifica la condición de propagación. Por ello, se introduce un dieléctrico de constante dieléctrica ϵ . Entre que valores debe estar comprendido dicha constante para lograr ese objetivo.?

SOLUCION

$$1^\circ. \quad \lambda_{c10} = 2 \times a = 4.58 \text{ cm} \Rightarrow$$

$$\lambda_{c20} = a = 2.29 \text{ cm}$$

$$2^\circ. \quad \lambda_0 = 6 \text{ cm}$$

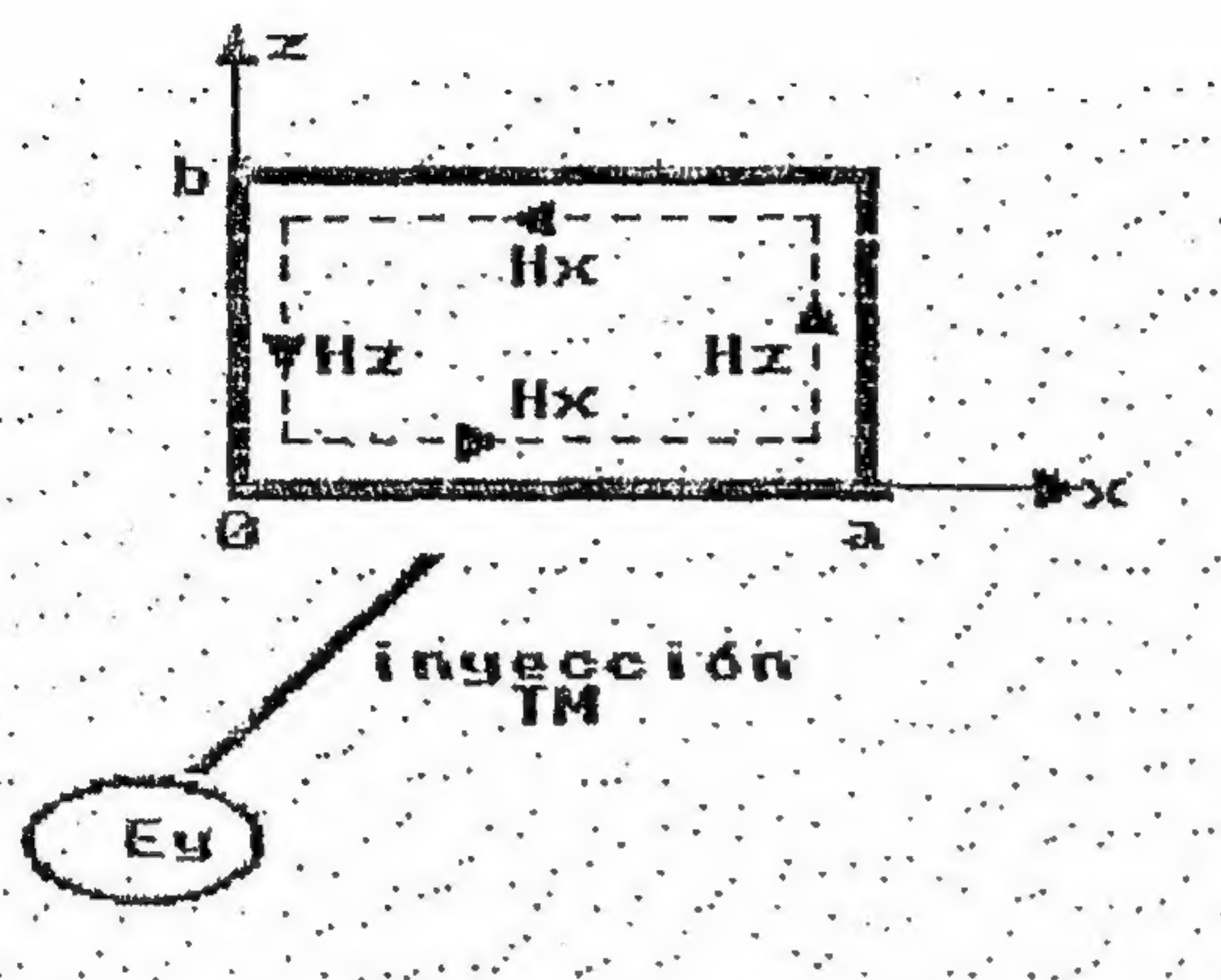
$$3^\circ \quad a < \frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}} < 2a$$

$$2.29 < \frac{6}{\sqrt{\epsilon}} < 4.58$$

$$4^\circ. \quad 1.31 < \epsilon < 6.86$$

1,31

1-12.-Obtener las expresiones de las componentes del frente TM en una guía rectangular.



SOLUCION

De la observación y las condiciones de contorno:

$$1^{\circ}. H_z(x=0) = -H_z(x=a) \quad H_x(z=0) = -H_x(z=b)$$

$$2^{\circ} H_z(z=0) = H_z(z=b) = 0 \quad H_x(x=0) = H_x(x=a) = 0$$

COMPONENTES

$$3^{\circ}. H_x = K \times \cos\left(\frac{n.\pi}{b}.z\right) \times \sin\left(\frac{m.\pi}{a}.x\right) \times e^{-J.\beta G.y}$$

$$4^{\circ}. H_z = K \times \cos\left(\frac{m.\pi}{a}.x\right) \times \sin\left(\frac{n.\pi}{b}.z\right) \times e^{-J.\beta G.y}$$

De la observación.

$$5^{\circ} \quad \frac{dH_z}{dx} = J.\omega.\epsilon.\epsilon_0.E_y \quad \frac{dH_x}{dz} = J.\omega.\epsilon.\epsilon_0.E_y$$

$$6^{\circ}. E_y = \frac{K}{J\omega.\mu.\mu_0} \times \sin\left(\frac{m.\pi}{a}.x\right) \times \sin\left(\frac{n.\pi}{b}.z\right) \times e^{-J.\beta G.y}$$

Observando ésta última expresión, se explica la razón por la cual el frente desaparece y por ende el Modo TM, cuando uno cualquiera de los dos subíndices vale cero

1.11. Una guía rectangular, cuyas dimensiones son $a=2.286\text{cm}$ $b=1.012\text{cm}$, recibe una potencia de 15mw , operando en la frecuencia de 9.4gigahertz en el modo dominante.

Se sabe que la potencia se obtiene mediante la siguiente integral: $P = \iint E_Z \times H_X \times d\Sigma$

Reemplazando en el integrando las expresiones dadas más arriba y efectuando las operaciones integrales, se obtiene:

$$P = 30 \times \pi \times a \times b \times H(0)^2 \times \frac{\lambda_C}{\lambda_0 \cdot \lambda_G}$$

Se pide calcular la componente real del campo electromagnético.

SOLUCION

$$1^\circ. \lambda_c = 2 \times a = 4.572\text{cm}$$

$$2^\circ \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = 3.19\text{cm}$$

$$3^\circ. \lambda_G = \frac{\lambda_0 \times \lambda_C}{\sqrt{\lambda_C^2 - \lambda_0^2}} = 4.45\text{cm}$$

$$4^\circ. H(0) = \sqrt{\frac{\lambda_G \cdot \lambda_0 \cdot P}{30 \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot \lambda_C}}$$

$$5^\circ. H(0) = 0.684\text{A} / \text{m}$$

GUIA DE ONDA CILINDRICA

Las condiciones básicas a cumplir necesarias para la propagación electromagnética en la guía de onda cilíndrica, son las mismas que en la guía de onda rectangular.

Es decir :

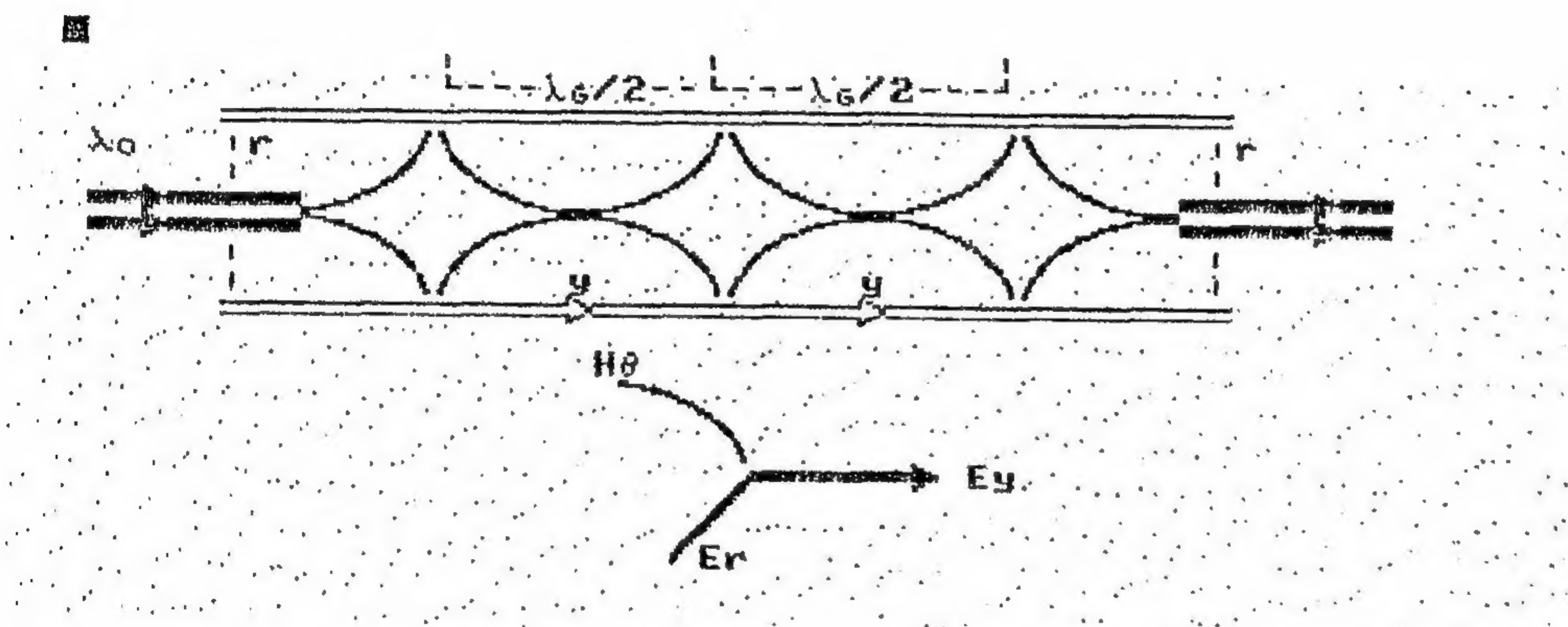
a).- Punto de partida para la determinación de las frecuencia de corte; son las condiciones de contorno de los campos, eléctrico y magnético, respectivamente.

$$1^{\circ}. \quad \vec{E}_T = 0 \quad H_N = 0$$

b).- La longitud de onda del espacio libre debe ser siempre menor que la longitud de onda de corte.

$$2^{\circ}. \quad \lambda_0 < \lambda_C$$

Cambia la configuración y las consecuencias de orden matemático. al tener que utilizar las coordenadas cilíndricas.



El modelo matemático que utilizamos es el TM. Inyectamos la señal de hiperfrecuencia en forma colineal. Las componentes H_θ y E_r conforman el frente de onda transversal, que es arrastrado por la componente longitudinal del campo eléctrico E_y .

Para analizar el proceso de transmisión recurrimos a la ecuación de las ondas.

$$3^{\circ}. \quad \vec{\nabla}^2 E_y = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot E_y$$

El laplaciano lo expresamos en coordenadas cilíndricas;

$$4^{\circ} \quad \frac{1}{r} \left(\frac{d\left(\frac{dE_y}{dr} \cdot r\right)}{dr} + \frac{d\left(\frac{dE_y}{r \cdot d\theta}\right)}{d\theta} + \frac{d\left(\frac{E_y \cdot r}{dy}\right)}{dy} \right) = -\omega^2 \mu \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y$$

$$5^{\circ} \quad \frac{d^2 E_y}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dE_y}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 E_y}{d\theta^2} + \frac{d^2 E_y}{dy^2} = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y$$

La propagación a lo largo del tubo cilíndrico se efectúa según el factor:

$$6^{\circ} \quad e^{J(n \cdot \theta + \beta_G \cdot y)} \quad \text{de donde; } \frac{d}{d\theta} = Jn \quad \frac{d}{dy} = J\beta_G$$

Si volvemos a derivar:

$$7^{\circ} \quad \frac{d^2}{d\theta^2} = -n^2 \quad \frac{d^2}{dy^2} = -\beta_G^2$$

Reemplazamos la Ecuación 7° en la 5°.

$$8^{\circ} \quad \frac{d^2 E_y}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dE_y}{dr} - \frac{n^2}{r^2} E_y - \beta_G^2 E_y = -\omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E_y$$

$$9^{\circ} \quad \omega^2 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 = \beta_0^2$$